XX PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

En el espacio vectorial $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden 5 con coeficientes reales, se consideran el subconjunto $\mathcal{R}$ formado por las matrices que son de la forma

$$A(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

y las matrices $I = A(1,0,0,0,0)$ y $M = A(0,1,0,0,0)$.

1. Demuestra, utilizando el producto de matrices por bloques, que $M^2 = A(0,0,1,0,0)$, $M^3 = A(0,0,0,1,0)$, $M^4 = A(0,0,0,0,1)$ y $M^k = O_5$ si $k \geq 5$.

2. Demuestra que $\mathcal{R} = \mathrm{Env}\{I, M, M^2, M^3, M^4\}$.

3. Halla una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{R}$.

4. Dada la matriz $N = A(1,2,3,4,5)$, escribe N como combinación lineal de las matrices de $\mathcal{B}$ y calcula N^{-1} sabiendo que N^{-1} pertenece a $\mathcal{R}$.

5. Sea $t : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación lineal que a cada matriz de $\mathcal{R}$ le asigna su traza. Determina la matriz asociada a t cuando en el espacio inicial se considera la base $\mathcal{B}$ y en el espacio final se considera la base $\mathcal{B}_1 = \{1/5\}$. Determina una base de la imagen y otra del núcleo de t.