XIX Premios Jorge Juan de Matemáticas

Matemática Discreta

30 de enero de 2018

Decimos que una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ verifica una relación de recurrencia lineal de orden $k \geq 1$, con coeficientes constantes si existen $c_n, c_{n-1}, \ldots c_{n-k}$, constantes no nulas y $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$, tales que $c_n a_n + c_{n-1} a_{n-1} + \cdots + c_{n-k} a_{n-k} = e_n$, para todo $n \geq k$.

1. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $a_0 = 0$ y $a_n - a_{n-1} = n^2$, para todo $n \geq 1$, demuestra que
$$a_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

2. En general, si la sucesión verifica $a_n = r a_{n-1} + e_n$, demuestra que
$$a_n = a_0 r^n + \sum_{j=1}^{n} r^{n-j} e_j,$$
para todo $n \geq 1$.

3. Si llamamos a_n al número de regiones del plano que determinan n rectas tales que por cada punto del plano pasan a lo sumo dos de ellas y ninguna es paralela a otra,

   3.1. Encuentra la relación de recurrencia que verifica la sucesión definida.

   3.1. ¿Cuántas regiones determinarán 20 rectas?

4. Si ahora consideramos $a_n = c_{n-1} a_{n-1} + c_{n-2} a_{n-2}$, demuestra:

   4.1. Si la sucesión no nula $\{r^n\}_{n=0}^{\infty}$ verifica la relación de recurrencia anterior, entonces r es raíz del polinomio $x^2 - c_{n-1} x - c_{n-2} = 0$.

   4.2. Si r_1 y r_2 son raíces distintas del polinomio anterior, entonces
$$a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,$$

para todo $n \geq 0$, con

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta = a_0 \\ &\alpha r_1 + \beta r_2 = a_1. \end{aligned}$$

4.3. Encuentra la expresión del término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$$