

# XVIII Premios Jorge Juan de Matemáticas

Matemática Discreta

4 de noviembre de 2017

1. Se llama **ecuación diofántica** a cualquier ecuación algebraica cuyos coeficientes son números enteros y de las que también se precisan sólo sus soluciones en el conjunto de los números enteros. Vamos a estudiar el caso más simple, **la ecuación diofántica lineal de dos variables**,  $ax + by = c$ , con  $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$ .

a) Demuestra que, dados  $a, b$  y  $c$  tres números enteros, la ecuación lineal  $ax + by = c$  tiene solución entera si, y sólo si,  $\text{mcd}(a, b) \mid c$ .

b) Demuestra que, en el caso de que tenga una solución entera, la ecuación tendrá infinitas soluciones enteras y serán de la forma  $(x, y)$ , donde:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\text{mcd}(a, b)}k \\ y = y_0 - \frac{a}{\text{mcd}(a, b)}k \end{cases}$$

siendo  $(x_0, y_0)$  una solución particular de la misma y  $k$  es cualquier número entero.

2. Calcula todas las soluciones enteras de la ecuación:

$$\sqrt{(x+y)(x-y) + (2x+2y-3)y - 2(x-7)} = x + y + 3$$

3. Una bodega debe entregar un pedido de 81000 litros de vino sin embotellar. Para ello posee camiones cisterna que transportan 3500 litros cada uno y remolques cisterna que transportan 1500. Cada camión puede llevar como mucho un remolque y, lógicamente, los remolques no pueden circular solos. Además, las cisternas deben ir llenas. Si la bodega quiere minimizar el número de camiones utilizados, ¿cuántos camiones y remolques debe utilizar? ¿Y si cada camión pudiera llevar hasta dos remolques?