XVII Premios Jorge Juan
Matemática Discreta

Por el pequeño teorema de Fermat sabemos que si p es un número primo, entonces para todo $a \in Z^+$ que sea primo relativo con el propio p se cumple que $a^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$

Hay números compuestos que también verifican este resultado: son los llamados números de Carmichael. Decimos que $n \in Z^+$ compuesto es un número de Carmichael si $a^{n-1} \equiv 1 (\bmod n)$, para todo $a \in Z^+$ tal que $\mathrm{mcd}(a, n) = 1$.

1. Comprueba, utilizando la definición, que $n = 1105$ es un número de Carmichael.

2. Demuestra que una condición suficiente para que un número $n \in Z^+$ compuesto sea un número de Carmichael es que cada factor primo p de n, verifique:

   (a) p^2 no divide a n;

   (b) $p - 1$ divide a $n - 1$.

3. Sabiendo que el menor número de Carmichael es 561, encuentra tres números primos p_1, p_2 y p_3 con $p_1 < p_2 < p_3 < 37$ y tales que $n = p_1p_2p_3$ y $m = 37p_1p_2p_3$ sean números de Carmichael.