XVI EDICION PREMIOS JORGE JUAN

CURSO 14/15

PROBABILIDAD

Recientemente recibí este correo que reproduzco literalmente:

> Estimados profesores de Estadística:
>
> Soy un alumno egresado de la UA que está preparando oposiciones. He encontrado un blog con consejos de cara a preparar la oposición y leo algo que me deja perplejo, cito:
>
> "Con 30 temas sobre un total de 75 las probabilidades de que al extraer cinco bolas os salga un tema que hayáis estudiado son del 95%."
>
> Aclaro que la oposición se compone de 75 temas. En el examen se sortean 5 y el opositor escoge 1.
>
> Me parece increíble que sólo estudiando 30 temas tengas la probabilidad tan a favor. No detalla cómo hace el cálculo y es lo que me interesa. ¿Podrían decirme cómo lo ha calculado? ¿O corregirlo en caso de ser incorrecto?
>
> Muchas gracias y un saludo.

a) En primer lugar, y al margen de que 95% no sean "probabilidades"… salvo para los sociólogos… ¿es cierta la afirmación del blog?

b) Si no lo es, calcula el mínimo número de temas que habría que preparar para alcanzar esas "probabilidades" del 95%. Si sí, pues no.

c) Los dos resultados anteriores se obtienen bajo el supuesto de que el opositor responderá correctamente a cualquier tema que haya preparado, lo cual, en algunos casos, es muchísimo suponer. Si no es así y la probabilidad de equivocarse al responder es la inversa del número de temas que no ha preparado, ¿cuál sería la respuesta al apartado anterior?

d) Finalmente, y bajo en las condiciones del apartado anterior, supongamos que el opositor ha estudiado una titulación, esta vez no diremos cuál, que no le permite, ni de lejos, pensar que el comentario del blog fuese "aproximadamente" cierto, por lo que ha decido estudiar todos los temas ¿cuándo habría que decirle que "es mejor que no estudie más"?

<u>RESOLUCIÓN:</u>

a) Calculamos, en primer lugar, la probabilidad del suceso en cuestión, es decir, que al seleccionar 5 temas de un total de 75 de los que hemos preparado 30, sepamos al menos uno. O lo que es lo mismo, el complementario de no saber ninguno de esos cinco.

$$P(saber\ alguna) = 1 - P(no\ saber\ ninguna) =$$
$$= 1 - \frac{\binom{45}{5}}{\binom{75}{5}} = 1 - 0.0708 = \mathbf{0.9292}$$

Luego la afirmación no es del todo cierta, pero no se aleja demasiado de la realidad.

b) Puesto que los números combinatorios son de difícil tratamiento en una ecuación, la solución al segundo apartado pasa por calcular las probabilidades de valores mayores, y próximos, a 30, por ejemplo 31.

$$p(31) = 1 - \frac{\binom{44}{5}}{\binom{75}{5}} = 1 - 0.0629 = 0.9371$$

Observamos que todavía no se alcanza la afirmación del 95%. Veamos qué ocurre con 33.

$$p(33) = 1 - \frac{\binom{42}{5}}{\binom{75}{5}} = 1 - 0.0493 = 0.9507$$

En este caso sí se supera la probabilidad de 0.95, pero para poder afirmar que 33 es el menor tamaño que satisface la condición exigida habrá que comprobar que 32 no la cumple:

$$p(32) = 1 - \frac{\binom{43}{5}}{\binom{75}{5}} = 1 - 0.0558 = 0.9442$$

Por lo que, efectivamente, para tener un 95% de “probabilidades” de saber algún tema de los que hemos preparado, hay que preparar **33 temas**.

c) Puesto que cuantos más temas estudiemos mayor es la probabilidad de equivocarnos pero dicha penalización es bastante baja, la solución será algo mayor que en el caso anterior, por ejemplo

$$p(40) = \left(1 - \frac{\binom{35}{5}}{\binom{75}{5}}\right)\left(1 - \frac{1}{35}\right) = 0.9812 \times 0.9714 = 0.9532$$

Dado que con 40 se supera la probabilidad requerida, habrá que comprobar las probabilidades de los tamaños inmediatamente anteriores

$$p(39) = \left(1 - \frac{\binom{36}{5}}{\binom{75}{5}}\right)\left(1 - \frac{1}{36}\right) = 0.9782 \times 0.9722 = 0.9510$$

$$p(38) = \left(1 - \frac{\binom{37}{5}}{\binom{75}{5}}\right)\left(1 - \frac{1}{37}\right) = 0.9747 \times 0.9730 = 0.9484$$

Por lo que, en este caso debería estudiar **39 temas**.

d) La respuesta a este apartado consiste en identificar el tamaño a partir del cual la probabilidad de aprobar decrece. Hasta el apartado anterior resultaba factible calcular las probabilidades de los tamaños candidatos a ser la solución. En este caso habría que resolver

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(1 - \frac{\binom{75-k}{5}}{\binom{75}{5}}\right)\left(1 - \frac{1}{75-k}\right) = 0$$

algo que no parece asequible, aunque quien quiera puede probar. Para simplificar el cálculo, podemos relajar la condición de selección "sin" reemplazamiento por la de "con" reemplazamiento, con lo que la expresión anterior será, aproximadamente

$$\frac{\partial}{\partial k}\left(1 - \left(1 - \frac{k}{75}\right)^5\right)\left(1 - \frac{1}{75-k}\right) = 0$$

expresión que derivando y operando se "reduce" a

$$5k^6 - 2246k^5 + 420375k^4 - 41962500k^3 + 2356171875k^2 - 70558593750k + 878027343750 = 0$$

y analizando su signo para valores de k, en un intervalo en el que esperamos encontrar la solución, pongamos entre 40 y 60, obtendremos el número de temas que no debería estudiar. Notar que es más sencillo analizar el signo de la expresión anterior que el crecimiento y decrecimiento de la inicial. Adicionalmente, recordemos que se trata de una aproximación lo que nos indicará en torno a qué valor se encuentra la solución del problema inicial, solución que obtendremos calculando algunas probabilidades en torno a ese punto.

Comprobamos que: *f(40)>0 ; f(60)<0 ; f(50)<0 ; f(45)>0 ; f(47)<0 ; f(46)>0*. Por lo que la solución del problema inicial estará en torno a 46. Calculamos las probabilidades en dicho entorno.

$$p(45) = \left(1 - \frac{\binom{30}{5}}{\binom{75}{5}}\right)\left(1 - \frac{1}{30}\right) = 0.9917 \times 0.9667 = 0.9587$$

$$p(46) = \left(1 - \frac{\binom{29}{5}}{\binom{75}{5}}\right)\left(1 - \frac{1}{29}\right) = 0.9931 \times 0.9655 = 0.9589$$

$$p(47) = \left(1 - \frac{\binom{28}{5}}{\binom{75}{5}}\right)\left(1 - \frac{1}{28}\right) = 0.9943 \times 0.9643 = 0.9588$$

Por tanto, no debería estudiar más de **46 temas**… no le “caben”.