

**XVI PREMIOS JORGE JUAN**  
**Universidad de Alicante, 7 de noviembre d 2014**

SEGUNDO NIVEL  
ANÁLISIS MATEMÁTICO

1. Sea  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a > 0$ ), una función continua y positiva. Probar que

$$\left( \int_0^a f(x) dx \right) \left( \int_0^a \frac{dx}{f(x)} \right) \geq a^2.$$

(Cinco puntos)

2. Sean  $d_1$  y  $d_2$  las métricas euclídeas en  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  respectivamente,  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x=0 \text{ ó } y=0\}$  y  $d = d_2|_T$  la métrica inducida desde el espacio euclídeo  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  en  $T$ . Demostrar que si  $\varphi: (\mathbb{R}, d_1) \rightarrow (T, d)$  es continua y sobreyectiva, entonces  $\varphi^{-1} \{(0, 0)\}$  tiene infinitos elementos.

(Cinco puntos)