XV EDICION PREMIOS JORGE JUAN

CURSO 13/14

PROBABILIDAD

Crisis, What crisis? España va bien. No hay más que recordar que en la pasada edición de la Champions League el Barça, Valencia, Málaga y otro equipo español que ahora no recuerdo, superaron la fase de grupos siendo la primera vez que cuatro equipos de un mismo país accedían a octavos de final. Aunque el sorteo es dirigido, impidiendo ciertos enfrentamientos, supongamos que fuese totalmente aleatorio y que con los dieciséis equipos, cuatro de ellos españoles, se confeccionan al azar los ocho partidos de esta ronda. En la siguiente ronda se vuelven a sortear los ocho equipos vencedores de los enfrentamientos anteriores para determinar los cuatro partidos que se disputan en los cuartos de final, repitiéndose el proceso en la siguiente ronda, semifinales, cuyos ganadores juegan la final. Si no tenemos en cuenta el orden entre los dos equipos de un partido, ¿cuántos posibles emparejamientos pueden darse en octavos de final? ¿Y en cuartos?

Supongamos también que los equipos españoles ganarán todas las eliminatorias que disputen contra equipos de otros países, que no es mucho suponer puesto que, no tendremos ninguna medalla Fields pero en otro tipo de competiciones somos la envidia del continente… que es lo realmente importante. Ante tan alentador panorama, calcular la probabilidad de que los cuatro equipos españoles se enfrenten entre si en octavos de final. ¿Cuál es la probabilidad de que dicho enfrentamiento se dé en cuartos de final? ¿Y en semifinales?

A quien no le guste el futbol que lo resuelva como un torneo de tenis, que también se nos da mejor que otras tonterías.

RESOLUCIÓN:

En primer lugar calculamos el número de posibles emparejamientos como el producto de posibilidades de cada enfrentamiento, fijado un equipo al azar en cada uno de los partidos, cuántos pueden enfrentarse con él:

- OCTAVOS: $15\times13\times11\times9\times7\times5\times3\times1 = \frac{P_{16}}{2^8\times P_8}$ = **2.027.025**
- CUARTOS: $7\times5\times3\times1 = \frac{P_8}{2^4\times P_4}$ = **105**

Las probabilidades de que se enfrenten todos entre si, sólo dos o ninguno de los españoles en octavos, cuartos o semifinales podemos calcularlas recurriendo a la Regla de Laplace, tomando como casos posibles los obtenidos anteriormente.

OCTAVOS

En cuanto a los casos favorables, el razonamiento es el mismo fijando previamente el suceso de interés

los cuatro = 3×11×9×7×5×3×1 = $\frac{P_4}{2^2 \times P_2} \times \frac{P_{12}}{2^6 \times P_6}$ = 31.185

sólo dos = 2×3×12×11×9×7×5×3×1 = $\binom{4}{2} \times 12 \times 11 \times \frac{P_{10}}{2^5 \times P_5}$ = 748.440

ninguno = 12×11×10×9×7×5×3×1= $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times \frac{P_8}{2^4 \times P_4}$ = 1.247.400

Por lo que, en octavos de final, las respectivas probabilidades de que se enfrenten los cuatro, sólo dos o ninguno son:

$$\text{P(los cuatro)} = \frac{31185}{2027025} = \frac{1}{65} = 0.0154$$

$$\text{P(sólo dos)} = \frac{748440}{2027025} = \frac{24}{65} = 0.3692$$

$$\text{P(ninguno)} = \frac{1247400}{2027025} = \frac{40}{65} = 0.6154$$

Estas probabilidades también se pueden calcular de forma secuencial. Una vez seleccionado un equipo para cada enfrentamiento, se calcula la probabilidad de que el otro sea del tipo de interés.

$$\text{P(los cuatro)} = \frac{3}{15} \times \frac{1}{13} \times 1 = \frac{1}{65} = 0.0154$$

$$\text{P(sólo dos)} = 2 \times \frac{3}{15} \times \frac{12}{13} \times 1 = \frac{24}{65} = 0.3692$$

$$\text{P(ninguno)} = \frac{12}{15} \times \frac{11}{13} \times \frac{10}{11} = \frac{40}{65} = 0.6154$$

CUARTOS

De forma análoga al caso anterior tendremos

los cuatro = 3×3×1 = $\frac{P_4}{2^2 \times P_2} \times \frac{P_4}{2^2 \times P_2}$ = 9

sólo dos = 2×3×4×3×1 = $\binom{4}{2} \times 4 \times 3$ = 72

ninguno = 4×3×2 = P_4 = 24

Con lo que, en cuartos de final, las probabilidades son

$$\mathrm{P(los\ cuatro)} = \frac{9}{105} = 0.0857$$

$$\mathrm{P(sólo\ dos)} = \frac{72}{105} = 0.6857$$

$$\mathrm{P(ninguno)} = \frac{24}{105} = 0.2286$$

o, equivalentemente, de forma secuencial

$$\mathrm{P(los\ cuatro)} = \frac{3}{7} \times \frac{1}{5} \times 1 = \frac{3}{35} = 0.0857$$

$$\mathrm{P(sólo\ dos)} = 2 \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{5} \times 1 = \frac{24}{35} = 0.6857$$

$$\mathrm{P(ninguno)} = \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{35} = 0.2286$$

Una vez obtenidas las probabilidades anteriores, podemos responder a las preguntas planteadas aplicando intersecciones de sucesos y probabilidades condicionadas.

P(coincidir los 4 en octavos) = **0.0154**

P(coincidir los 4 en cuartos) =
= P(4 en cuartos | 0 en octavos) × P(0 en octavos) =
$= \frac{9}{105} \times \frac{1247400}{2027025} = \mathbf{0.0527}$

P(coincidir los 4 en semifinales) =
= P(4 en semis | 0 en cuartos) × P(0 en cuartos | 0 en octavos) × P(0 en octavos) =
$= 1 \times \frac{24}{105} \times \frac{1247400}{2027025} = \mathbf{0.1407}$