PREMIO JORGE JUAN 2013

PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Decimos que un tetraedro (o pirámide triangular) es *rectangular* cuando tres de sus caras son triángulos rectángulos a los que que llamaremos *catetos*, mientras que la cuarta cara la llamaremos *hipotenusa*.

Se pide:

(a) Probar que el cuadrado del área de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de las áreas de los catetos (Teorema de Pitágoras en 3D).[1]

(b) Decir cómo debe construirse un tetraedro rectangular cuya hipotenusa tenga área mínima con la condición de que la altura sobre la hipotenusa mida h metros.

[1] Este resultado se conoce como Teorema de Gua (1783), aunque ya era conocido por Descartes, quien nunca lo publicó. El clérigo ilustrado francés Jean-Paul Gua es conocido por haber precedido a Diderot al frente del proyecto de la Enciclopedia. Puede encontrarse más información sobre el Teorema de Pitágoras en 3D y sus extensiones en:

J.-P. Quadrat, J.B. Lasserre, and J.-B. Hiriart-Urruty, Pythagoras' theorem for areas. American Math. Monthly, 549-551 (2001).

Solución: Eligiendo convenientemente unos ejes de coordenadas rectangulares, podemos considerar cualquier tetraedro rectangular como la intersección de $\mathbb{R}^3_+$ con un semiespacio de la forma $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\leq 1$.

(a) Los vértices son $O\left(0,0,0\right)$, $A\left(a,0,0\right)$, $B\left(0,b,0\right)$ y $C\left(0,0,c\right)$.

El área de conv $\{O,A,B\}$ es la mitad de la norma del producto de sus catetos, $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, es decir, $\frac{ab}{2}$. Por lo tanto, la suma de los cuadrados de las áreas laterales es

$$\frac{1}{4}\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right). \tag{1}$$

Por lo que respecta a la base, su área es la mitad de la norma del producto vectorial de $AB=(-a,b,0)$ por $AC=(-a,0,c)$, es decir, $\frac{1}{4}\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)$, exactamente lo mismo que (1).

(b) Mantengamos la notación de (a). La altura de la pirámide es la distancia del origen al plano de la base, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$, es decir, $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=h$ (dato), por lo que $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}=:k$ (otra constante). De acuerdo con (a), el problema a resolver es

$$\begin{array}{lll} P_1: & \text{Min} & f_1\left(a,b,c\right)=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \\ & \text{s.a} & x\in F_1, \end{array}$$

donde

$$F_1:=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3_{++}:\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=k\right\}.$$

F_1 es cerrado: sea $\left\{(a_r,b_r,c_r)\right\}_{r\in\mathbb{N}}$ una sucesión en F_1 tal que $(a_r,b_r,c_r)\to(a,b,c)$; como $\frac{1}{a_r^2}+\frac{1}{b_r^2}+\frac{1}{c_r^2}=k$, $\frac{1}{a_r^2}\leq k$ y $a_r\geq\frac{1}{\sqrt{k}}$, por lo que $a\geq\frac{1}{\sqrt{k}}>0$; De igual forma, $b>0$ y $c>0$. Además, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=k$ por un sencillo argumento de continuidad, de forma que $(a,b,c)\in F_1$.

Como f_1 es continua sobre $\mathbb{R}^3_{++}$ y los conjuntos de nivel inferior de f_1 en F_1 son también cerrados, probando que uno de ellos es acotado podremos concuir que P_1 tiene mínimo global; sea $(a,b,c)\in F_1$ tal que $f_1\left(a,b,c\right)\leq\lambda$, con λ positivo suficientemente grande; entonces se tiene $a,b,c\geq\frac{1}{\sqrt{k}}$ y $ab,ac,bc\leq\lambda$; por lo tanto, $\frac{1}{\sqrt{k}}\leq a\leq\frac{\lambda}{b}\leq\lambda\sqrt{k}$, desiguadades también válidas para b y c, por lo que el conjunto de nivel inferior a λ de f_1 en F_1 está contenido en el cubo $\left[\frac{1}{\sqrt{k}},\lambda\sqrt{k}\right]^3$.

Para hallar una solución óptima analíticamente efectuamos un cambio de variables que linealice la restricción: tomaremos pues $u:=k^{-1}a^{-2}$, $v=k^{-1}b^{-2}$, $w=k^{-1}c^{-2}$. Obtenemos así el siguiente problema de optimización geométrica equivalente a P_1 :

$$\begin{array}{lll} P_2: & \min & f_2\left(u,v,w\right)=\frac{1}{uv}+\frac{1}{uw}+\frac{1}{vw} \\ & \text{s.a.} & u+v+w=1. \end{array}$$

(Habría que añadir $u>0,v>0,w>0$, pero esa restricción es implícita en optimización geométrica.)

La función de Lagrange de P_2 es $L\left(u,v,w\right)=\frac{1}{uv}+\frac{1}{uw}+\frac{1}{vw}+\lambda\left(u+v+w-1\right),$ cuyo gradiente respecto de $\left(u,v,w\right)$ es

$$\nabla L\left(u,v,w;\lambda\right)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{u^2v}-\frac{1}{u^2w} \\ -\frac{1}{uv^2}-\frac{1}{v^2w} \\ -\frac{1}{uw^2}-\frac{1}{vw^2} \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La única solución de $\nabla L\left(u,v,w;\lambda\right)=0_3$ en $\mathbb{R}^3_{++}$ es $u=v=w=\frac{1}{3}$, con $\lambda=-18$. Deshaciendo el cambio de variables obtenemos el único candidato a solución óptima de P_1.

Por lo tanto, las aristas laterales del tetraedro rectangular cuya hipotenusa tiene menor área miden

$$a=b=c=\sqrt{\frac{3}{k}}=h\sqrt{3}$$

metros. En otras palabras, los catetos del tetraedro óptimo son triángulos rectángulos isósceles cuyos lados iguales miden $h\sqrt{3}$ metros, mientras que la hipotenusa es un triángulo equilátero cuyo lado mide $\|AB\|=\sqrt{a^2+b^2}=h\sqrt{6}$ metros.