XIV EDICION PREMIOS JORGE JUAN
CURSO 11/12

PROBABILIDAD

Las famosas urnas A y B con sus respectivas bolas blancas y negras que aparecen en cualquier colección de problemas de probabilidad que se precie, se han quejado, con razón, de que, a pesar de su reconocido prestigio, nunca han aparecido en ningún enunciado de los premios Jorge Juan. Para remediar semejante injusticia, en esta edición recurriremos a ellas. Puesto que dos urnas dan poco juego para montar una historieta, este año simplificaremos considerablemente el problema… al menos en cuanto a su enunciado. También es verdad que el problema podría considerar aulas con chicos y chicas en lugar de urnas con bolas blancas y negras pero seguro que incurriríamos en algún tipo de discriminación, por lo que nos quedaremos con las urnas, o si lo preferís, l@s urn@s.

La urna A contiene bolas blancas y negras en igual proporción. Inicialmente, la composición de la urna B es idéntica a la de la A. Tomamos dos bolas de la urna A y las introducimos en la urna B, posteriormente tomamos dos bolas de la urna B y las introducimos en la urna A.

a) Calcular la probabilidad, en función de las bolas de cada color, de que la composición final de las urnas sea la misma que la inicial.
b) ¿Cuántas bolas de cada color debe haber en las urnas para que la probabilidad del suceso anterior sea máxima? ¿Y para que sea mínima? ¿Cuánto valen dichas probabilidades?

RESOLUCIÓN:

a) Supongamos que ambas urnas contienen n bolas blancas y n negras. Al tomar dos bolas de la urna A puede ocurrir, con sus respectivas probabilidades, que:

- ambas sean del mismo color: P (mismo color) = $2\,\frac{n}{2n}\,\frac{n-1}{2n-1} = \frac{n-1}{2n-1}$

- sean de distinto color: P (distinto color) = $2\,\frac{n}{2n}\,\frac{n}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$

por tanto las posibles configuraciones de la urna B, con sus respectivas probabilidades de volver a la configuración inicial, serán:

- n+2 de un color y n del otro. En este caso la probabilidad de volver a la configuración inicial será:

$$\text{P (dos bolas del color mayoritario)} = \frac{n+2}{2n+2}\,\frac{n+1}{2n+1} = \frac{n+2}{2(2n+1)}$$

- n+1 de cada color. En este caso la probabilidad del suceso de interés es:

$$\text{P (una bola de cada color)} = 2\,\frac{n+1}{2n+2}\,\frac{n+1}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$$

Y la probabilidad pedida será, aplicando el teorema de la probabilidad total, la suma de los productos de las probabilidades anteriores:

$$\text{P (configuración inicial)} = \frac{n-1}{2n-1}\,\frac{n+2}{2(2n+1)} + \frac{n}{2n-1}\,\frac{n+1}{2n+1} = \boldsymbol{\frac{3n^2+3n-2}{8n^2-2}}$$

b) Para resolver el segundo apartado obtendremos en primer lugar la derivada, respecto a n, de la probabilidad anterior:

$$\frac{\partial}{\partial n}\,p(n) = \frac{\partial}{\partial n}\,\frac{3n^2+3n-2}{8n^2-2} = -\frac{24n^2+20n+6}{(8n^2-2)^2}$$

y, puesto que la derivada es negativa $\forall\ n \geq 1$, la función es decreciente en todo su dominio y, por tanto, alcanzará su máximo en el límite inferior de su intervalo de definición, $[1\ ,+\infty)$, y su mínimo en el límite superior, y dichas probabilidades valdrán:

- máximo: **n = 1** $\Rightarrow$ $p_{max} = p(1) = \frac{2}{3} =$ **0.6666**

- mínimo: **n = +∞** $\Rightarrow$ $p_{min} = \lim_{n\to+\infty} p(n) = \frac{3}{8} =$ **0.375**