XIV Premios Jorge Juan de la Universidad de Alicante
Métodos Numéricos

Invirtiendo matrices

Supongamos que M es una matriz regular. Sabemos que si existe una norma matricial tal que $\|M\| < 1$, entonces $\rho(M) < 1$ y esto permite asegurar que $I - M$ es invertible y sabemos como se calcula su inversa.

Sea A una matriz regular y supongamos que X_0 es una aproximación de la inversa de A tal que para alguna norma matricial, $E_0 = I - AX_0$ verifica $\|E_0\| < 1$.
Podemos construir un método iterativo para mejorar la aproximación anterior de la siguiente forma:

$$X_{m+1} = X_m(I + E_m) \qquad E_{m+1} = I - AX_{m+1}$$

1. Pruebe que
$$E_{m+1} = E_m^2.$$

2. Aplicando el resultado del apartado anterior, demuestre que
$$\lim_{m\to\infty} X_m = A^{-1}.$$

3. Demuestre que
$$\prod_{j=0}^{\infty}\left(I + E_0^{2^j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} E_0^j.$$

Solución

1.

$$E_{m+1} = I - AX_{m+1} = I - AX_m(I + E_m) = I - AX_m - AX_mE_m =$$

$$= E_m - AX_mE_m = (I - AX_m)E_m = E_m^2.$$

2. Para probar que $\lim_{m\to\infty} X_m = A^{-1}$, deberemos estudiar la sucesión numérica $\|X_m - A^{-1}\| = \|A^{-1} - X_m\|$.

   $$A^{-1}-X_m = A^{-1}(I-AX_m) = A^{-1}E_m = A^{-1}E_{m-1}^2 = A^{-1}E_{m-2}^{2^2} = ... = A^{-1}E_0^{2^m}.$$

   Así pues, aplicando las propiedades de las normas matriciales y el hecho de que $\|E_0\| < 1$, concluimos que $\|X_m - A^{-1}\|$ es tan pequeña como queramos.

3. A partir de la igualdad $E_0 = I - AX_0$ obtenemos $AX_0 = I - E_0$. Las condiciones iniciales permiten afirmar que $I - E_0$ es invertible y que su inversa es $\sum_{j=0}^{\infty} E_0^j$.
   Así que

   $$(AX_0)^{-1} = (I - E_0)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} E_0^j.$$

   De donde se obtiene

   $$A^{-1} = X_0 \sum_{j=0}^{\infty} E_0^j.$$

   En el apartado anterior hemos probado que $A^{-1} = \lim_{m\to\infty} X_{m+1}$.
   Por la construcción del método sabemos que

   $$X_{m+1} = X_m(I+E_m) = X_{m-1}(I+E_{m-1})(I+E_m) = ... = X_0(I+E_0)...(I+E_{m-1})(I+E_m).$$

   Teniendo en cuente que $E_j = E_0^{2^j}$, podemos escribir

   $$X_{m+1} = X_0 \prod_{j=0}^{m}(I + E_0^{2^j}).$$

   Tomando límites cuando $m \to \infty$ y teniendo en cuente que X_0 es invertible, se obtiene el resultado.