XIV PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

Sean V y V' espacios euclídeos y sean $B = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \ldots, \overrightarrow{e}_m\}$ y $B' = \{\overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \ldots, \overrightarrow{e}'_n\}$ bases ortonormales de V y V', respectivamente. Sea $f : V \longrightarrow V'$ una aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases B y B' es A. Sea $f^* : V' \longrightarrow V$ una aplicación tal que $\langle f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle = \langle \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y})\rangle$ cualesquiera que sean $\overrightarrow{x} \in V$ e $\overrightarrow{y} \in V'$. Se pide:

1. Demostrar que f^* es lineal.

2. Demostrar que la matriz asociada a f^* respecto de las bases B' y B es A^T.

3. Demostrar que $(\mathrm{Im}\, f)^{\perp} = \ker f^*$.

4. Demostrar que $V' = \ker f^* \oplus \mathrm{Im}\, f$.

5. Demostrar que si $\mathrm{rg}\, A = m$, entonces $A^T A$ es invertible.

6. Demostrar que la matriz asociada a la proyección ortogonal de V' sobre $W = \mathrm{Im}\, f$ respecto de la base B' es $A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$.

SOLUCIÓN:

1. Para demostrar que f^* es lineal, debemos probar que

$$f^*(\lambda_1 \overrightarrow{y}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{y}_2) = \lambda_1 f^*(\overrightarrow{y}_1) + \lambda_2 f^*(\overrightarrow{y}_2),$$

cualesquiera que sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2 \in V'$.

Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2 \in V'$, se cumple que

$$\langle \overrightarrow{x}, f^*(\lambda_1 \overrightarrow{y}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{y}_2)\rangle = \langle f(\overrightarrow{x}), \lambda_1 \overrightarrow{y}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{y}_2\rangle = \lambda_1 \langle f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}_1\rangle + \lambda_2 \langle f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}_2\rangle$$

$$= \lambda_1 \langle \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}_1)\rangle + \lambda_2 \langle \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}_2)\rangle = \langle \overrightarrow{x}, \lambda_1 f^*(\overrightarrow{y}_1) + \lambda_2 f^*(\overrightarrow{y}_2)\rangle,$$

para todo $\overrightarrow{x} \in V$, por lo que

$$f^*(\lambda_1 \overrightarrow{y}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{y}_2) = \lambda_1 f^*(\overrightarrow{y}_1) + \lambda_2 f^*(\overrightarrow{y}_2)$$

y f^* es lineal.

2. Sea C la matriz asociada a f^* respecto de las bases B' y B. La columna j-ésima de la matriz C viene dada por las componentes de $f^*\left(\overrightarrow{e}'_j\right)$ en la base B, es decir,

$$f^*\left(\overrightarrow{e}'_j\right) = \sum_{k=1}^{m} c_{kj} \overrightarrow{e}_k,$$

para $j = 1, \ldots, n$. Entonces, para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, se cumple

$$\left\langle \overrightarrow{e}_i, f^*\left(\overrightarrow{e}'_j\right)\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{e}_i, \sum_{k=1}^{m} c_{kj}\overrightarrow{e}_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} c_{kj}\left\langle \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_k\right\rangle = c_{ij}. \tag{1}$$

La última igualdad se debe a que la base B es ortonormal.

Por otra parte,

$$\left\langle \overrightarrow{e}_i, f^*\left(\overrightarrow{e}'_j\right)\right\rangle = \left\langle f\left(\overrightarrow{e}_i\right), \overrightarrow{e}'_j\right\rangle \tag{2}$$

y las componentes de $f\left(\overrightarrow{e}_i\right)$ en la base B' forman la columna i-ésima de la matriz A, es decir,

$$f\left(\overrightarrow{e}_i\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overrightarrow{e}'_k,$$

por lo que, sustituyendo en (2), se obtiene

$$\left\langle \overrightarrow{e}_i, f^*\left(\overrightarrow{e}'_j\right)\right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overrightarrow{e}'_k, \overrightarrow{e}'_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\left\langle \overrightarrow{e}'_k, \overrightarrow{e}'_j\right\rangle = a_{ji}. \tag{3}$$

De (1) y (3), se obtiene $c_{ij} = a_{ji}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, por lo que

$$C = A^T.$$

3. $\overrightarrow{y} \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ si, y sólo si, $\left\langle f\left(\overrightarrow{x}\right), \overrightarrow{y}\right\rangle = 0$ para todo $\overrightarrow{x} \in V$. Esta igualdad es equivalente a $\left\langle \overrightarrow{x}, f^*\left(\overrightarrow{y}\right)\right\rangle = 0$ para todo $\overrightarrow{x} \in V$, que se cumple si, y sólo si, $f^*\left(\overrightarrow{y}\right) = 0$ o, lo que es lo mismo, $\overrightarrow{y} \in \ker f^*$.

Así pues, $(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \ker f^*$.

4. $\operatorname{Im} f$ es un subespacio vectorial de V' y se sabe que todo espacio vectorial es suma directa de cualquier subespacio vectorial y su complemento ortogonal, por lo que

$$V' = (\operatorname{Im} f) \oplus (\operatorname{Im} f)^{\perp} = (\operatorname{Im} f) \oplus (\ker f^*).$$

Esta última igualdad es debida al apartado 3.

5. Puesto que A es la matriz asociada a f respecto de las bases B y B' y A^T es la matriz asociada a f^* respecto de las bases B' y B, el producto de las dos matrices $A^T A$ es la matriz asociada a $f^* \circ f$ y $A^T A$ es invertible si, y sólo si, $f^* \circ f$ es biyectiva.

Puesto que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{Im} f)$ se tiene, por hipótesis, que $\dim(\operatorname{Im} f) = m$. Puesto que para la aplicación f se cumple

$$m = \dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\ker f) + m,$$

se tiene que $\dim(\ker f) = 0$, o lo que es lo mismo, f es inyectiva.

Veamos que $f^* \circ f$ es también inyectiva. Sea $\overrightarrow{x} \in V$ tal que $(f^* \circ f)\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$. Entonces, $f^*\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \overrightarrow{0}$ y, por lo tanto, $f\left(\overrightarrow{x}\right) \in (\ker f^*) \cap (\operatorname{Im} f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Así pues, $f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$ y, puesto que f es inyectiva, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. Por lo tanto, $f^* \circ f$ es inyectiva.

Aplicando, de nuevo la fórmula de las dimensiones para $f^* \circ f$, se tiene que

$$m = \dim V = \dim\left(\ker\left(f^* \circ f\right)\right) + \dim\left(\operatorname{Im}\left(f^* \circ f\right)\right) = \dim\left(\operatorname{Im}\left(f^* \circ f\right)\right),$$

de donde se obtiene que $f^* \circ f$ es suprayectiva.

6. Dado $W = \operatorname{Im} f \subset V'$, se tiene que $V' = W \oplus (\ker f^*)$ (véase apartado 4.). Por lo tanto, dado cualquier $\overrightarrow{y} \in V'$, existen vectores únicos $\overrightarrow{y}_1 \in W$ e $\overrightarrow{y}_2 \in \ker f^*$ tales que $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2$. La proyección ortogonal de V' sobre W es una aplicación lineal de V' en V' que asigna al vector $\overrightarrow{y} \in V'$ el vector $\overrightarrow{y}_1 \in W \subset V'$.

Consideremos, ahora, la aplicación $g = f \circ \left(f^* \circ f\right)^{-1} \circ f^*$ cuya matriz asociada respecto de la base B' es $A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$. Veremos que g es la proyección de V' sobre W. En efecto, sea $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2$, con $\overrightarrow{y}_1 \in W$ e $\overrightarrow{y}_2 \in \ker f^*$, un vector de V'. Aplicando la linealidad de g, se tiene

$$g\left(\overrightarrow{y}\right) = g\left(\overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{y}_2\right) = g\left(\overrightarrow{y}_1\right) + g\left(\overrightarrow{y}_2\right).$$

Por ser $\overrightarrow{y}_1 \in W = \operatorname{Im} f$, existe $\overrightarrow{x} \in V$ tal que $\overrightarrow{y}_1 = f\left(\overrightarrow{x}\right)$ y

$$\begin{aligned} g\left(\overrightarrow{y}_1\right) &= g\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = \left(f \circ \left(f^* \circ f\right)^{-1} \circ f^*\right)\left(f\left(\overrightarrow{x}\right)\right) \\ &= \left[f \circ \left(f^* \circ f\right)^{-1} \circ \left(f^* \circ f\right)\right]\left(\overrightarrow{x}\right) = f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{y}_1. \end{aligned}$$

Por otra parte, $\overrightarrow{y}_2 \in \ker f^*$, por lo que

$$\begin{aligned} g\left(\overrightarrow{y}_2\right) &= \left(f \circ \left(f^* \circ f\right)^{-1} \circ f^*\right)\left(\overrightarrow{y}_2\right) \\ &= \left[f \circ \left(f^* \circ f\right)^{-1}\right]\left(f^*\left(\overrightarrow{y}_2\right)\right) = \left[f \circ \left(f^* \circ f\right)^{-1}\right]\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$g\left(\overrightarrow{y}\right) = g\left(\overrightarrow{y}_1\right) + g\left(\overrightarrow{y}_2\right) = \overrightarrow{y}_1 + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{y}_1,$$

es decir, g coincide con la proyección ortogonal de V' sobre W.