XIII EDICIÓN PREMIOS JORGE JUAN
ESTADÍSTICA

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|x-\theta|\}, \quad x \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de X.

(a) Obtener un estadístico suficiente para θ.

(b) Obtener un estimador por el método de los momentos de θ. ¿Es único?

(c) Obtener un estimador de máxima verosimilitud para θ. ¿Es único?

NOTAS:

Sea X una variable aleatoria, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, $k \geq 1$, un parámetro desconocido respecto del cuál depende la distribución teórica poblacional, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de X.

1. Un estadístico $S = S(X_1,...,X_n)$ es *suficiente* para θ si y sólo si la función de densidad o de probabilidad conjunta de la muestra aleatoria simple puede factorizarse de la siguiente forma:

$$f_\theta(x_1,...,x_n) = h(x_1,...,x_n)\cdot k(\theta, S(x_1,...,x_n)), \quad \forall (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. Un *estimador por el método de los momentos* para θ, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1,....,X_n)$ se obtiene reemplazando r momentos poblacionales $\mu_j = E(X^j)$, $j = 1,...,r$, $r \geq k$, por los correspondientes momentos muestrales, $m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j$.

3. Un *estimador de máxima verosimilitud* $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1,....,X_n)$ para θ es aquél que, para cada muestra observada de la población $(x_1, x_2,...,x_n)$, $\hat{\theta}(x_1,....,x_n)$ maximiza la función de verosimilitud de la muestra. Para una distribución poblacional continua, *la función de verosimilitud* de la muestra observada es la función de densidad de la muestra vista como función del parámetro.

SOLUCIÓN

1. La función de densidad conjunta de la muestra aleatoria simple:

$$f_\theta(x_1,...,x_n) = \frac{1}{2^n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|\right\},\quad (x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Si tomamos:

$$h(x_1,...,x_n) = \frac{1}{2^n},\ \forall(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$
$$k(\theta, S(x_1,...,x_n)) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}|x_i-\theta|\right\},$$
$$S(x_1,...,x_n) = (x_1,...,x_n),$$

de acuerdo con el teorema de Factorización, $S(X_1,...,X_n) = (X_1,...,X_n)$, es suficiente para θ, y no existe otro de menor dimensión.

2. Calculemos μ_1 :

$$\mu_1 = E(X) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x-\theta|}dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\theta} xe^{-\theta+x}dx + \int_{\theta}^{\infty} xe^{-x+\theta}dx\right\} \underset{(*)}{=}$$
$$\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty}(\theta-y)e^{-y}dy + \int_0^{\infty}(y+\theta)e^{-y}dy\right\} =$$
$$\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\infty}\theta e^{-y}dy - \int_0^{\infty} ye^{-y}dy + \int_0^{\infty} ye^{-y}dy + \int_0^{\infty}\theta e^{-y}dy\right\} = \theta\int_0^{\infty}e^{-y}dy = \theta.$$

(*) En la primera integral, hemos hecho el cambio $y=-x+\theta$, y en la segunda integral, $y=-\theta+x$.

Obtenemos $\mu_1 = \theta \Rightarrow \hat{\theta} = m_1 = \overline{X}$ es un <u>estimador por el método de los momentos de θ.</u>

En cuanto a su unicidad, podemos calcular μ_2 :

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-|x-\theta|}dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\theta} x^2e^{-\theta+x}dx + \int_{\theta}^{\infty} x^2e^{-x+\theta}dx\right\} \underset{(*)}{=}$$
$$\frac{1}{2}\left\{\left[x^2e^{-\theta+x}\right]_{-\infty}^{\theta} - \int_{-\infty}^{\theta}2xe^{-\theta+x}dx + \left[-x^2e^{-x+\theta}\right]_{\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty}2xe^{-x+\theta}dx\right\} \underset{(**)}{=}$$
$$\frac{1}{2}\left\{\theta^2 - 2\int_0^{\infty}(\theta-y)e^{-y}dy + \theta^2 + 2\int_0^{\infty}(\theta+y)e^{-y}dy\right\} =$$
$$\theta^2 + 2\int_0^{\infty} ye^{-y}dy = \theta^2 + 2.$$

(*) Resolviendo por partes.

(**) En la primera integral, hemos hecho el cambio $y=-x+\theta$, y en la segunda integral, $y=-\theta+x$.

Obtenemos $\mu_2 = \theta^2 + 2 \Rightarrow \theta = \pm\sqrt{\mu_2 - 2}$. Obtenemos dos estimadores más por el método de los momentos: $\breve{\theta} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2}$ y $\widehat{\theta} = -\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2}$. Por lo tanto no es único.

3. La función de verosimilitud del parámetro θ para cada muestra observada $(x_1,...,x_n)$ es:

$$L(x_1,...,x_n,\theta) = \frac{1}{2^n}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta|\right\}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Esta función no es derivable respecto de θ, pero observamos que

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}} L(x_1,...,x_n,\theta) \Leftrightarrow \min_{\theta\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta|$$

Vamos a llamar $H(\theta) := \sum_{i=1}^{n}|x_i - \theta| = \sum_{i=1}^{n}\left|x_{(i)} - \theta\right|$, expresada en términos de la muestra ordenada.

Evidentemente, $H(\theta)$ dependerá de la posición de θ respecto de la muestra ordenada.

Vamos a distinguir según *n* sea par o impar, pues ello afectará al resultado final.

<u>CASO 1</u>.- Si $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$.

- Si $\theta \le x_{(1)}$, $H(\theta) = \sum_{i=1}^{2k}\left(x_{(i)} - \theta\right) = \sum_{i=1}^{2k} x_{(i)} - (2k)\theta$. Se trata de una recta de pendiente negativa igual a $-2k$.
- Si $x_{(1)} < \theta \le x_{(2)}$, $H(\theta) = \left(\theta - x_{(1)}\right) + \sum_{i=2}^{2k}\left(x_{(i)} - \theta\right) = \sum_{i=2}^{2k} x_{(i)} - x_{(1)} - 2(k-1)\theta$. Obtenemos de nuevo un recta de pendiente negativa igual a $-2(k-1) > -2k$.

Siguiendo este esquema, comprobamos que, siempre que $\theta \le x_{(k)}$, $H(\theta)$ está formada por segmentos de rectas de pendiente negativa, cuyo valor absoluto, que es un número par, va disminuyendo. <u>Claramente, $H(\theta)$ es decreciente para</u> $\theta \le x_{(k)}$.

- Si $x_{(k)} < \theta \le x_{(k+1)}$, $H(\theta) = \sum_{i=1}^{k}\left(\theta - x_{(i)}\right) + \sum_{i=k+1}^{2k}\left(x_{(i)} - \theta\right) = \sum_{i=k+1}^{2k} x_{(i)} - \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$, función constante en θ.

- Si $x_{(k+1)} < \theta \le x_{(k+2)}$, $H(\theta) = \sum_{i=1}^{k+1}\left(\theta - x_{(i)}\right) + \sum_{i=k+2}^{2k}\left(x_{(i)} - \theta\right) = \sum_{i=k+2}^{2k} x_{(i)} - \sum_{i=1}^{k+1} x_{(i)} + 2\theta$. Obtenemos en este caso una recta de pendiente positiva igual a 2.

Siguiendo este esquema, comprobamos que, siempre que $x_{(k+1)} < \theta \le x_{(2k)}$, $H(\theta)$ está formada por segmentos de rectas de pendiente positiva, cuyo valor (par) va aumentando.

- Si $\theta > x_{(2k)}$, $H(\theta) = \sum_{i=1}^{2k}\left(\theta - x_{(i)}\right) = (2k)\theta - \sum_{i=1}^{2k} x_{(i)}$. Se trata de una recta de pendiente positiva igual a 2*k*.

<u>Claramente, $H(\theta)$ es creciente para</u> $\theta > x_{(k+1)}$.

La conclusión es que, dado que $H(\theta)$ es una función continua en toda la recta real, alcanza su valor mínimo en cualquier punto del segmento $\left[x_{(k)}, x_{(k+1)}\right]$. Así, <u>el estimador de máxima verosimilitud de θ no es único</u>: $\boxed{\hat{\theta}_\alpha = \alpha X_{(k)} + (1-\alpha) X_{(k+1)}, \quad 0 \le \alpha \le 1}$.

<u>CASO 2</u>.- Si $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Procedemos de una forma análoga al CASO 1, comprobando que, siempre que $\theta \le x_{(k+1)}$, $H(\theta)$ está formada por segmentos de rectas de pendiente negativa, cuyo valor absoluto, que es un número impar, va disminuyendo. <u>Claramente, $H(\theta)$ es decreciente para</u> $\theta \le x_{(k+1)}$.

A continuación, comprobamos que, siempre que $x_{(k+1)} < \theta$, $H(\theta)$ está formada por segmentos de rectas de pendiente positiva, cuyo valor (impar) va aumentando. <u>Claramente, $H(\theta)$ es creciente para</u> $\theta > x_{(k+1)}$. La conclusión es que, dado que $H(\theta)$ es una función continua en toda la recta real, alcanza su valor mínimo en $x_{(k+1)}$. Así, <u>el estimador de máxima verosimilitud de θ es único</u>:

$\boxed{\hat{\theta} = X_{(k+1)}}$.