XII PREMIOS JORGE JUAN

ANÁLISIS MATEMÁTICO: Segundo Ciclo

Alicante, 27 de noviembre de 2009

Calcular la siguiente integral doble:

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sqrt{y}\, sen^2 x\right)^{-\frac{1}{2}} \, dx\, dy.$$

XII PREMIOS JORGE JUAN
ANÁLISIS MATEMÁTICO: Segundo Ciclo
Alicante, 27 de noviembre de 2009

Calcular la siguiente integral doble:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sqrt{y}\, sen^2 x\right)^{-\frac{1}{2}} \, dx\, dy.$$

SOLUCIÓN:

La función $f(x,y) = \left(1 - \sqrt{y}\, sen^2 x\right)^{-\frac{1}{2}}$ es continua en $\Omega = \left[\,0,\ \frac{\pi}{2}\,\right] \times [0,\ 1] - \left\{\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)\right\}$.
Así es integrable en Ω.
Hagamos primeramente el siguiente cambio de variables: $\begin{cases} x = \varphi \\ y = r^4 \end{cases}$,
$0 < r \le 1,\ 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$, siendo el jacobiano $J\begin{pmatrix} x & y \\ \varphi & r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4r^3 \end{vmatrix} = 4r^3 > 0.$

Entonces $I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4r^3}{\sqrt{1 - r^2\, sen^2\, \varphi}}\, d\varphi \right) dr.$

Pasando de nuevo a coordenadas cartesianas $\begin{cases} u = r\cos\varphi \\ v = r\, sen\varphi \end{cases}$, $\quad 0 < r \le 1,\ 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$,
siendo el jacobiano $J\begin{pmatrix} u & v \\ \varphi & r \end{pmatrix} = J = \begin{vmatrix} -r\, sen\varphi & \rho\cos\varphi \\ \cos\varphi & sen\varphi \end{vmatrix} = r > 0,$
de donde $J\begin{pmatrix} \varphi & r \\ u & v \end{pmatrix} = J^{-1} = \frac{1}{r} > 0.$ Por tanto $0 < u \le 1,\ 0 < v \le \sqrt{1 - u^2}$ o bien
$0 < v \le 1,\ 0 < u \le \sqrt{1 - v^2}$ y entonces:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{4(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - v^2}}\, du\, dv = \int_0^1 \frac{4}{\sqrt{1 - v^2}} \left(\frac{u^3}{3} + v^2 u \,\Bigg|_0^{\sqrt{1-v^2}} \right) dv =$$

$$\int_0^1 \frac{4}{\sqrt{1 - v^2}} \left[\frac{1}{3}\sqrt{1 - v^2}\,(1 - v^2) + v^2\sqrt{1 - v^2} \right] dv = 4\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} v^2 \right) dv = \frac{20}{9}.$$