XI EDICION PREMIOS JORGE JUAN
CURSO 08/09

PROBABILIDAD

Como recordaréis los que hayáis trabajado el manual de Mendenhall, los mejicanos llaman "corrida" a cualquier cosa. Concretamente define corrida como una sucesión no interrumpida de artículos defectuosos o de artículos buenos y propone problemas sobre el número y tamaño de las corridas. Para evitar que el enunciado os distraiga del hecho de que vuestra prioridad, al menos en este momento, es la resolución de este ejercicio, utilizaremos la terminología más habitual de "racha". Llamaremos racha a una sucesión ininterrumpida de más de dos éxitos de cualquier tipo, que para contar malas rachas ya habrá tiempo.

a) Consideremos "éxito" ganar cualquier premio de la lotería primitiva. Antes de empezar con las rachas, calcular la probabilidad de obtener algún premio, de cualquier tipo, en la lotería primitiva.

b) Con la probabilidad obtenida, hablar de rachas es tontería, por lo que reduciremos el juego a algo más sencillo como extraer cartas de una baraja donde consideraremos éxito, ¡cómo no! obtener copa.

   b.1) Si en diez extracciones hemos obtenido cuatro copas, que para las horas que son ya son bastantes, ¿cuál es la probabilidad de que haya alguna racha?

   b.2) Si en m extracciones hemos obtenido 4 copas, ¿cuál es la probabilidad de que haya alguna racha?

RESOLUCION

a) La probabilidad de obtener algún premio en la lotería primitiva será la probabilidad de acertar tres, cuatro, cinco o seis de los números premiados. Puesto que en general, la probabilidad de acertar i número i $\in$ { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 } es

$$P(\,i\ aciertos\,) = \frac{\binom{6}{i} \times \binom{43}{6-i}}{\binom{49}{6}}$$

la probabilidad de obtener algún premio será:

$$P(\,algún\ \ premio\,) = 1 - P(\,ningún\ \ premio\,) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{\binom{6}{i}\binom{43}{i}}{\binom{49}{6}} =$$

$$= 1 - \frac{6096454 + 5775588 + 1851150}{13983816} = \frac{260624}{13983816} = \mathbf{0.0186}$$

b) Si de diez extracciones hemos obtenido dos copas, la probabilidad de obtener alguna racha será la probabilidad de obtener 3 ó 4 copas seguidas. En general, podemos tomar como un solo resultado la secuencia CCC, con lo que dispondremos de ocho elementos, seis no son copas, uno es copa y el otro son las tres copas seguidas. Las diferentes formas de ordenar estos elementos serán:

$$RP_8^{6,1,1} = \frac{8!}{6!} = 56$$

aunque habrá que tener en cuenta que de este modo hemos contado dos veces los casos en que las cuatro copas están seguidas, por lo que bastará restar estos siete casos. En cuanto a los casos posibles son las combinaciones de diez elementos tomados de cuatro en cuatro. Por tanto, la probabilidad pedida será

$$P(\,racha\,|\,4\ copas\,) = \frac{RP_8^{6,1,1} - (10 - 4 + 1)}{C_{10,4}} = \frac{56 - 7}{210} = \frac{49}{210} = \mathbf{0.2333}$$

Si en lugar de 10 cartas extraemos m, siguiendo el razonamiento anterior, las expresiones comentadas pasarán a ser

$$\text{P(racha | 4 copas en m extracciones)} = \frac{RP_{m-2}^{m-4,1,1} - (m - 4 + 1)}{C_{m,4}}$$

y simplificando esta expresión se obtiene la probabilidad de obtener alguna racha, si de m extracciones se han obtenido cuatro copas:

$$\text{P(racha | 4 copas en m extracciones)} = \frac{24(m-3)}{m^3 - 3m^2 + 2m}$$