# XI Premios Jorge Juan de la Universidad de Alicante
# Métodos Numéricos

**Problema**

Consideremos la función $f(x) = x^5$ en el intervalo $[0, a], a > 0$.

1. Utilice la fórmula de interpolación de Lagrange,

$$p(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + .... + f(x_n)L_{n,n}(x),$$

para determinar el polinomio interpolador de grado 2 en los puntos de abscisas $\left\{0, \frac{a}{2}, a\right\}$, sabiendo que

$$L_{n,k} = \frac{\prod_{i \neq k}^{n} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k}^{n} (x_k - x_i)}.$$

2. Sea

$$H_{n,k}(x) = [1 - 2(x - x_k)L'_{n,k}(x_k)]L^2_{n,k}(x)$$

y

$$\overset{\frown}{H}_{n,k}(x) = (x - x_k)L^2_{n,k}(x).$$

$$H_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)H_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)\overset{\frown}{H}_{n,k}(x)$$

es el polinomio interpolador de Hermite de grado $2n + 1$, es decir el que coincide con la función y la derivada de la misma en los nodos de interpolación.
Determine el polinomio interpolador de Hermite de la función dada en los puntos de abscisas $\{0, a\}$.

3. El error de interpolación en la fórmula de Hermite viene dado por

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x - x_0)^2.....(x - x_n)^2.$$

Determine, en función de $x$ y $a$ el valor de $\xi$ que aparece en la fórmula del error para la interpolación obtenida en el apartado anterior.

**Solución.**

1.- En este caso, $n = 2$ y es elemental probar que el polinomio interpolador de Lagrange es:

$$p_2(x) = 2a^3x\left(x - \frac{a}{2}\right) - \frac{a^3}{8}x(x-a)$$

2.- Ahora $n = 1$ y el polinomio de Hermite es de grado 3.
Teniendo en cuenta que $f(0) = f'(0) = 0$ y que $f(a) = a^5$y $f'(a) = 5a^4$, se tiene

$$h_3(x) = a^5\left[1 - 2(x-a)\frac{1}{a}\right]\frac{x^2}{a^2} + 5a^4(x-a)\frac{x^2}{a^2}.$$

Agrupando términos, se obtiene

$$H_3(x) = 3a^2x^3 - 2a^3x^2.$$

3.- El cálculo de $\xi$ se efectúa a partir de la expresión del error aplicado a este caso:

$$x^5 - (3a^2x^3 - 2a^3x^2) = \frac{120\xi}{24}x^2(x-a)^2.$$

Descomponiendo en factores el primer miembro de esta igualdad se llega fácilmente al resultado

$$\xi = \frac{x+2a}{5}.$$