XI PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

En el espacio vectorial $\mathbb{P}_5$ de los polinomios en una variable con coeficientes reales de grado menor o igual que 5, se considera la aplicación $h : \mathbb{P}_5 \to \mathbb{P}_5$ dada por

$$h\left[p\left(t\right)\right] = p\left(t+1\right) - p\left(t\right).$$

Se pide:

1. Probar que h es lineal.

2. Obtener la matriz asociada a h respecto de la base canónica.

3. Calcular $\ker h$ (núcleo de h) y su dimensión.

4. Calcular $\operatorname{img} h$ (imagen de h) y su dimensión.

5. Determinar los polinomios de $\mathbb{P}_5$ cuya imagen por h es $q\left(t\right) = t^4$.

6. Utilizar el resultado anterior para deducir una expresión para $s_k = 1^4 + 2^4 + \ldots + k^4$, $k \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN

1. Dados $p, q \in \mathbb{P}_5$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se cumple

$$h[(p+q)(t)] = (p+q)(t+1) - (p+q)(t) = p(t+1) + q(t+1) - p(t) - q(t) = h[p(t)] + h[q(t)].$$

$$h[(\alpha p)(t)] = (\alpha p)(t+1) - (\alpha p)(t) = \alpha p(t+1) - \alpha p(t) = \alpha[p(t+1) - p(t)] = \alpha h[p(t)].$$

Por lo tanto, h es una aplicación lineal.

2. Denotamos $p_k(t) = t^k$ para $k = 0, \dots, 5$.

La base canónica de $\mathbb{P}_5$ es $C = \{p_0(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t), p_5(t)\}$.

$h[p_0(t)] = p_0(t+1) - p_0(t) = 1 - 1 = 0.$

$h[p_1(t)] = p_1(t+1) - p_1(t) = t + 1 - t = 1.$

$h[p_2(t)] = p_2(t+1) - p_2(t) = (t+1)^2 - t^2 = 1 + 2t.$

$h[p_3(t)] = p_3(t+1) - p_3(t) = (t+1)^3 - t^3 = 1 + 3t + 3t^2.$

$h[p_4(t)] = p_4(t+1) - p_4(t) = (t+1)^4 - t^4 = 1 + 4t + 6t^2 + 4t^3.$

$h[p_5(t)] = p_5(t+1) - p_5(t) = (t+1)^5 - t^5 = 1 + 5t + 10t^2 + 10t^3 + 5t^4.$

La matriz pedida es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Para calcular el núcleo de h tenemos que buscar los polinomios

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \in \mathbb{P}_5$$

tales que $h[p(t)] = 0$. Esto, planteado en forma matricial, es equivalente a resolver el sistema homogéneo

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que se obtiene

$$\ker h = \{p(t) = a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\},$$

cuya dimensión es 1.

4. La imagen de h es el subespacio de $\mathbb{P}_5$ generado por las imágenes por h de los vectores de una base de $\mathbb{P}_5$. Tomando la base canónica, se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{img} h &= L\left\{h\left[p_0(t)\right], h\left[p_1(t)\right], h\left[p_2(t)\right], h\left[p_3(t)\right], h\left[p_4(t)\right], h\left[p_5(t)\right]\right\} = \\
&= L\left\{0, 1, 1+2t, 1+3t+3t^2, 1+4t+6t^2+4t^3, 1+5t+10t^2+10t^3+5t^4\right\} = \\
&= L\left\{1, 1+2t, 1+3t+3t^2, 1+4t+6t^2+4t^3, 1+5t+10t^2+10t^3+5t^4\right\},
\end{aligned}$$

que tiene dimensión 5.

5. Buscamos los polinomios $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$ de $\mathbb{P}_5$ tales que $h[p(t)] = t^4$, es decir, buscamos las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $a_5 = \frac{1}{5}$, $a_4 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{30}$ y $a_0 \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$p(t) = a_0 - \frac{1}{30}t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{5}t^5$$

con $a_0 \in \mathbb{R}$.

6. Denotamos $q(t) = t^4$ que, por el apartado anterior, sabemos que es

$$q(t) = h[p(t)] = p(t+1) - p(t),$$

con $p(t) = a_0 - \frac{1}{30}t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{5}t^5$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

Dado $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
s_k &= 1^4 + 2^4 + \ldots + k^4 = q(1) + q(2) + \ldots + q(k) = \\
&= p(2) - p(1) + p(3) - p(2) + \ldots + p(k) - p(k-1) + p(k+1) - p(k) = \\
&= p(k+1) - p(1).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$s_k = 1^4 + 2^4 + \ldots + k^4 = a_0 - \frac{1}{30}(k+1) + \frac{1}{3}(k+1)^3 - \frac{1}{2}(k+1)^4 + \frac{1}{5}(k+1)^5 - \left(a_0 - \frac{1}{30} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right).$$

Realizando los cálculos en la expresión anterior, obtenemos

$$s_k = -\frac{1}{30}k + \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^4 + \frac{1}{5}k^5.$$