

X Premios Jorge Juan de la Universidad de Alicante

Métodos Numéricos

Problema

La función generatriz

$$\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = T_0(x) + T_1(x)t + T_2(x)t^2 + \dots, \quad |x| < 1, \quad |t| \leq 1,$$

nos da otra definición de los polinomios de Tchebyshev, T_0, T_1, \dots .

1. Encuentre, utilizando esta definición, los polinomios T_0, T_1, T_2, T_3 .
2. Pruebe, a partir de la definición dada, que se verifica la relación

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

3. Utilizando la recurrencia del apartado anterior, demuestre que

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

4. De nuevo mediante la recurrencia del apartado 2, demuestre que

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Solución.

1.- Si escribimos la función generatriz en la forma

$$(1 - 2xt + t^2)(T_0(x) + T_1(x)t + T_2(x)t^2 + \dots) = 1 - xt$$

y efectuamos el producto indicado, obtenemos

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) - 2xT_0(x) &= -x \\ T_2(x) - 2xT_1(x) + T_0(x) &= 0 \\ \dots & \\ T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

Así, pues,

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= x \\ T_2 &= 2xT_1 - T_0 = 2x^2 - 1 \\ T_3 &= 2x(x^2 - 1) - T_1 = 4x^3 - 3x \end{aligned}$$

y hemos resuelto los apartados 1 y 2.

3.- Es evidente que T_0 y T_1 verifican la relación. Admitamos que cualquier polinomio, T_k , $k \leq n$, también la verifica.

Utilizando la relación del segundo apartado, se tiene

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-x) &= 2(-x)T_n(-x) - T_{n-1}(-x) \text{ (utilizando inducción)} = \\ &= 2(-x)(-1)^n T_n(x) - (-1)^{n-1} T_{n-1}(x) = \\ &= (\text{teniendo en cuenta que } (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}) = \\ &= (-1)^{n+1} (2xT_n(x) - T_{n-1}(x)) = (-1)^{n+1} T_{n+1}(x). \end{aligned}$$

4.- Es evidente que la relación es cierta para $n = 0$ y $n = 1$. Admitamos que $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ y $T_{n-1}(x) = \cos((n-1) \arccos x)$.

Por el apartado 2 y llamando $t = \arccos x$, se tiene

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2 \cos t \cos(nt) - \cos((n-1)t) = \\ &= 2 \cos t \cos(nt) - (\cos nt \cos t + \sin nt \sin t) = \cos nt \cos t - \sin nt \sin t = \\ &= \cos(n+1)t = \cos((n+1) \arccos x) \end{aligned}$$