X EDICIÓN PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

Sea $\mathbb{E}$ el espacio vectorial de las sucesiones de números complejos y a, $b \in \mathbb{C}$ con $b \neq 0$. Se considera la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ (u_n) & \longmapsto & (v_n) \end{array}$$

con Se pide:

1. Calcular $\ker h$ (núcleo de h).
2. Demostrar que la aplicación $\Phi : \mathbb{E} \to \mathbb{C}^2$ dada por $\Phi\left((u_n)\right) = (u_1, u_2)$ es lineal y que su restricción al subespacio $\ker h$ es una biyección.
3. Demostrar que el conjunto formado por las sucesiones $(\overline{u}_n)$ (con $\overline{u}_1 = 1$, $\overline{u}_2 = 0$ y $\overline{u}_{n+2} + a\overline{u}_{n+1} + b\overline{u}_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$) y $(\overline{v}_n)$ (con $\overline{v}_1 = 0$, $\overline{v}_2 = 1$ y $\overline{v}_{n+2} + a\overline{v}_{n+1} + b\overline{v}_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$) es una base de $\ker h$.
4. Determinar la relación que debe existir entre a y b para que haya una única sucesión en $\ker h$ cuyo término general sea de la forma $u_n = r^n$ ($r \neq 0$).
5. Sabiendo que, cuando se da la situación del apartado anterior, la sucesión (nr^n) también pertenece a $\ker h$, calcular el término general de la sucesión (u_n) tal que $u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_1 = 3$ y $u_2 = 18$.

Solución:

1. Por definición,

$$\ker h = \left\{ (u_n) \in \mathbb{E} \,| h\left((u_n)\right) = (0) \in \mathbb{E} \right\}.$$

Puesto que $h\left((u_n)\right) = (v_n)$ con $v_n = u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\ker h = \left\{ (u_n) \in \mathbb{E} \,| u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0, \, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Sean $(u_n), (u'_n) \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Puesto que, por definición,

$$(u_n) + (u'_n) := (u_n + u'_n) \in \mathbb{E}$$

y

$$\lambda (u_n) := (\lambda u_n) \in \mathbb{E},$$

se tiene

$$\begin{aligned} \Phi\left((u_n) + (u'_n)\right) &= \Phi\left(u_n + u'_n\right) = (u_1 + u'_1, u_2 + u'_2) = \\ &= (u_1, u_2) + (u'_1, u'_2) = \Phi\left(u_n\right) + \Phi\left(u'_n\right) \end{aligned}$$

y

$$\Phi(\lambda(u_n)) = \Phi((\lambda u_n)) = (\lambda u_1, \lambda u_2) = \lambda(u_1, u_2) = \lambda\Phi((u_n)).$$

Por lo tanto, Φ es una aplicación lineal.

Consideremos ahora $\Psi : \ker h \longrightarrow \mathbb{C}^2$ la restricción de Φ a $\ker h$. Veremos que Ψ es biyectiva.

En efecto, si $(u_n), (u'_n) \in \ker h$ y $\Psi((u_n)) = \Psi((u'_n))$, entonces $(u_1, u_2) = (u'_1, u'_2)$ y, por lo tanto, $u_1 = u'_1$ y $u_2 = u'_2$. Además, por ser $(u_n), (u'_n) \in \ker h$, se cumple, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

y

$$u'_{n+2} + au'_{n+1} + bu'_n = 0.$$

Probaremos, por inducción completa sobre n, que $u_n = u'_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, se tiene

$$u_3 + au_2 + bu_1 = 0$$

y

$$u'_3 + au'_2 + bu'_1 = 0$$

y, restando ambas igualdades, se obtiene $u_3 = u'_3$.

Supongamos ahora que $u_i = u'_i$ para todo $i < n$. Se obtiene $u_n = u'_n$, restando las expresiones

$$u_n + au_{n-1} + bu_{n-2} = 0$$

y

$$u'_n + au'_{n-1} + bu'_{n-2} = 0.$$

Así pues, $(u_n) = (u'_n)$ y Ψ es inyectiva.

Para probar que Ψ es suprayectiva, supongamos que $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Tomando $(u_n) \in \mathbb{E}$ tal que $u_1 = u$, $u_2 = v$ y $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(u_n) \in \ker h$ y $\Psi((u_n)) = (u, v)$.

3. Probamos, en primer lugar, que $(\overline{u}_n)$ y $(\overline{v}_n)$ son linealmente independientes.

Sea $\alpha(\overline{u}_n) + \beta(\overline{v}_n) = 0$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces $\alpha\overline{u}_n + \beta\overline{v}_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $\alpha\overline{u}_1 + \beta\overline{v}_1 = 0$ y $\alpha\overline{u}_2 + \beta\overline{v}_2 = 0$, de donde se obtiene $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Veamos, ahora, que $\{(\overline{u}_n), (\overline{v}_n)\}$ es un sistema de generadores de $\ker h$.

En efecto, si $(w_n) \in \ker h$, se tiene que $\Psi((w_n)) = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ y, si denotamos por

$\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$, se tiene $\Psi\left((w_n)\right) = w_1 e_1 + w_2 e_2$. Puesto que $\Psi\left((\overline{u}_n)\right) = (1,0) = e_1$ y $\Psi\left((\overline{v}_n)\right) = (0,1) = e_2$, se tiene

$$\Psi\left((w_n)\right) = w_1 e_1 + w_2 e_2 = w_1 \Psi\left((\overline{u}_n)\right) + w_2 \Psi\left((\overline{v}_n)\right)$$

que, por ser Ψ una aplicación lineal, se convierte en

$$\Psi\left((w_n)\right) = \Psi\left(w_1\left(\overline{u}_n\right) + w_2\left(\overline{v}_n\right)\right)$$

y, por ser Ψ inyectiva, $(w_n) = w_1\left(\overline{u}_n\right) + w_2\left(\overline{v}_n\right)$. Por lo tanto, $\{(\overline{u}_n), (\overline{v}_n)\}$ es un sistema de generadores.

4. La sucesión (r^n), con $r \neq 0$, pertenece a $\ker h$ si, y sólo si,

$$r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sacando factor común a r^n en la expresión anterior, se tiene

$$r^2 + ar + b = 0,$$

por lo que $r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$. Para que r sea único debe cumplirse que $a^2 - 4b = 0$, es decir, $b = \frac{a^2}{4}$. En ese caso, $r = \frac{-a}{2}$.

5. Para la sucesión (u_n) dada en el enunciado, se tiene que $(u_n) \in \ker h$ para los valores de $a = -6$ y $b = 9$. Puesto que $b = \frac{a^2}{4}$, sabemos, por el apartado anterior, que existe una única sucesión en $\ker h$ de la forma (r^n) y el valor de r es $\frac{-a}{2} = 3$. Además, en ese caso, también sabemos que la sucesión $(n3^n) \in \ker h$ y, por lo tanto, $\Psi\left((n3^n)\right) = (1 \cdot 3^1, 2 \cdot 3^2) = (3, 18)$. Por otra parte, tenemos que $\Psi\left((u_n)\right) = (u_1, u_2) = (3, 18) = \Psi\left((n3^n)\right)$ y, por ser Ψ inyectiva, $(u_n) = (n3^n)$.