Análisis Convexo

Definición: Se dice que $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un *conjunto convexo* si el segmento lineal cerrado que une cualquier par de puntos de $\mathbb{C}$ está totalmente contenido en dicho conjunto; es decir, el conjunto $\mathbb{C}$ es convexo si

$$\left.\begin{array}{c} \forall\, x^1, x^2 \in \mathbb{C} \\ \forall\, \lambda \in [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow (1-\lambda)\, x^1 + \lambda x^2 \in \mathbb{C}.$$

Definición: Si $\mathbb{C}$ un convexo no-vacío de $\mathbb{R}^n$, se dice que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es *convexa sobre* $\mathbb{C}$ si para todo par de puntos de $\mathbb{C}$, x^1 y x^2, y para todo $\lambda \in [0,1]$ se verifica

$$f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2).$$

Sea $\mathbb{C}$ un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ cuyo interior topológico contiene al origen; es decir, tal que $0_n \in \operatorname{int} \mathbb{C}$. Se pide:

1) Probar que la expresión

$$f(x) := \inf\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda \mathbb{C}\},$$

donde $\lambda\mathbb{C} := \{\lambda x : \forall x \in \mathbb{C}\}$, define una función f que está definida y toma valor finito en todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

2) Probar que f es *positivamente homogénea*; i.e.,

$$f(\mu x) = \mu f(x),\ \forall \mu \geq 0 \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

3) Demostrar que f es *subaditiva*; i.e.,

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

4) Comprobar que f es convexa sobre $\mathbb{R}^n$.

5) Se sabe que, como consecuencia de la convexidad de f sobre $\mathbb{R}^n$, será continua en todo el espacio. Probar que se cumple

$$\operatorname{int} \mathbb{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 1\}.$$

6) Probar que si $\mathbb{C} = \mathbb{B}$, bola abierta con centro en el origen y radio uno para una cierta norma $\|.\|$ en $\mathbb{R}^n$, entonces la función f coincide con la norma; i.e.,

$$f(x) = \|x\|.$$

Solución:

1) Como $0_n \in \operatorname{int}\mathbb{C}$, existirá $\rho > 0$ tal que $\rho\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$, donde $\mathbb{B}$ es la bola abierta con centro en el origen y radio uno. Entonces, cualquiera que sea $x \neq 0_n$

$$\frac{\rho}{2\|x\|}x \in \mathbb{C} \Longrightarrow x \in \frac{2\|x\|}{\rho}\mathbb{C},$$

y el conjunto $\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda\mathbb{C}\} \neq \emptyset$, por lo que $\inf\{\lambda \geq 0 \mid x \in \lambda\mathbb{C}\} < \infty$. Si $x = 0_n$, obviamente $\inf\{\lambda \geq 0 \mid 0_n \in \lambda\mathbb{C}\} = 0$, y concluimos que la función f está definida y tiene valor finito en todo punto de $\mathbb{R}^n$. Además, $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y $f(0_n) = 0$.

2) Esta propiedad es obvia para $\mu = 0$. Supongamos, pues, $\mu > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\mu x) &= \inf\{\lambda \geq 0 \mid \mu x \in \lambda\mathbb{C}\} \\ &= \inf\{\mu\frac{\lambda}{\mu} \geq 0 \mid x \in \frac{\lambda}{\mu}\mathbb{C}\} \\ &= \mu\inf\{\frac{\lambda}{\mu} \geq 0 \mid x \in \frac{\lambda}{\mu}\mathbb{C}\} \\ &= \mu f(x). \end{aligned}$$

3) Es evidente que, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$x \in (f(x)+\varepsilon)\mathbb{C} \text{ e } y \in (f(y)+\varepsilon)\mathbb{C}.$$

Por lo tanto

$$x + y \in (f(x)+\varepsilon)\mathbb{C} + (f(y)+\varepsilon)\mathbb{C} = (f(x)+f(y)+2\varepsilon)\mathbb{C}.$$

Como esta pertenencia se da para todo $\varepsilon > 0$, resulta $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$.

4) Si $\lambda \in [0,1]$ y x e y son puntos arbitrarios en $\mathbb{R}^n$

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leq f((1-\lambda)x) + f(\lambda y) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

5) Es evidente que si $f(x) < 1$, se tiene $x \in \mathbb{C}$, es decir

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 1\} \subset \mathbb{C}. \tag{1}$$

Como f es continua, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 1\}$ será abierto y, por (1),

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 1\} \subset \operatorname{int}\mathbb{C}.$$

Veamos, ahora, que se verifica también la inclusión contraria.

Sea $x^0 \in \operatorname{int} \mathbb{C} \subset \mathbb{C}$. Es claro que $f(x^0) \leq 1$, y comprobaremos que no se puede dar $f(x^0) = 1$. Si fuese $f(x^0) = 1$, y dado que $x^0 \in \operatorname{int} \mathbb{C}$, existiría $\mu > 1$ tal que $\mu x^0 \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$f(\mu x^0) = \mu f(x^0) = \mu > 1,$$

lo cual es imposible porque $f(z) \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

6) En efecto, si $x = 0_n$, $f(0_n) = \|0_n\| = 0$. Si $x \neq 0_n$, y cualquiera que sea $\lambda > \|x\|$, resulta obvio que

$$x = \lambda \frac{x}{\lambda} \in \lambda \mathbb{B},$$

y haciendo $\lambda \to \|x\|$ se deduce $f(x) \leq \|x\|$.

Por otra parte, si $\lambda < \|x\|$ es claro que $x \notin \lambda \mathbb{B}$, por lo que $f(x) = \|x\|$.