VIII PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

Alicante, 10 de noviembre de 2006

1. Sea $f:[0,1]\to R$ una función diferenciable tal que $f(0)=0$ y $f(x)>0$ para todo $x\in(0,1)$.

Demuestra que existe $c\in(0,1)$ tal que $\dfrac{7f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

2. Sean x,y,z,v enteros positivos distintos tales que $x+y=z+v$.

¿Existirá un número real $l>1$, tal que $x^l+y^l=z^l+v^l$? Justifica la respuesta.

VIII PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

Alicante, 10 de noviembre de 2006

1. Sea $f:[0,1]\to R$ una función diferenciable tal que $f(0)=0$ y $f(x)>0$ para todo $x\in(0,1)$.

Demuestra que existe $c\in(0,1)$ tal que $\dfrac{7f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

Solución:

La expresión $\dfrac{7f'(c)}{f(c)}=\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$ es equivalente a $7f'(c)\,f(1-c)=f'(1-c)\,f(c)$, que a su vez es equivalente a que la ecuación $7f'(x)\,f(1-x)-f'(1-x)\,f(x)=0$ tenga al menos una solución $x\in(0,1)$.

Aplicando el teorema de Rolle a la función $h(x)=f^7(x)\,f(1-x)$ en el intervalo $[0,1]$, pues h es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$ y además $h(0)=h(1)=0$, se tiene que existe $c\in(0,1)$, tal que $h'(c)=0$, que implica el resultado pedido.

2. Sean x,y,z,v enteros positivos distintos tales que $x+y=z+v$.

¿Existirá un número real $l>1$, tal que $x^l+y^l=z^l+v^l$? Justifica la respuesta.

Solución:

Sea $u=x+y=z+v$. Supongamos que $x<y$, $z<v$. Entonces $x,z\in\left(0,\dfrac{u}{2}\right)$; $y=u-x$, $v=u-z$.

Razonemos por contradicción suponiendo que existe $l>1$, tal que $x^l+y^l=z^l+v^l$.

Sea $f:(0,u)\to(0+\infty)$ definida por $f(t)=t^l+(u-t)^l$, $t\in(0,u)$. La función f es derivable y $f'(t)=l\left(t^{l-1}+(u-t)^{l-1}\right)$. Claramente $t=\dfrac{u}{2}$ es un mínimo relativo y absoluto de h en $[0,u]$. Y entonces h es estrictamente decreciente en $\left(0,\dfrac{u}{2}\right)$. Como $x,z\in\left(0,\dfrac{u}{2}\right)$, $h(x)\neq h(z)$ lo que implica que $x^l+y^l\neq z^l+v^l$. ¡contradicción!