IX EDICIÓN PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra

1. En el espacio vectorial de los polinomios en una variable con coeficientes reales, demuestra que si $p_k(x) = (1+x)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces el conjunto $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$ es linealmente independiente para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{P}_n$ el espacio vectorial formado por los polinomios en una variable con coeficientes reales y de grado menor o igual que n. Demuestra que el conjunto

$$B = \{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$$

es una base de $\mathbb{P}_n$.

3. Dada la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{P}_n & \longmapsto & \mathbb{P}_n \\ & p(x) & \longrightarrow & (f_n(p))(x) = (1+x)^n\, p\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \end{array},$$

se pide:

a) Determinar $f_n(p_k)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.

b) Calcular la matriz asociada a f_n respecto de la base B.

c) Demostrar que $f_n \circ f_n = 2^n \cdot id_{\mathbb{P}_n}$.

d) Utilizando la igualdad del apartado anterior, deducir los valores propios de f_n.

e) Para $n = 4$, demostrar que f_n es diagonalizable.

SOLUCIÓN

1. Para $n = 0$, el conjunto está formado por un único elemento no nulo, $p_0(x) = 1$, por lo que es linealmente independiente. Para cualquier otro $n \in \mathbb{N}$, lo probaremos por inducción.

Para $n = 1$, el conjunto es $\{p_0(x), p_1(x)\} = \{1, 1+x\}$. Si tomamos una combinación lineal de los elementos de dicho conjunto y la igualamos a cero,

$$\alpha_0 + \alpha_1(1+x) = 0,$$

identificando los coeficientes de los téminos del mismo grado en ambos lados de la igualdad, se obtiene $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Por lo tanto, $\{p_0(x), p_1(x)\}$ es linealmente independiente.

Supongamos, ahora, que el conjunto $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)\}$ es linealmente independiente. Probaremos que la proposición también es cierta para el conjunto $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$. Consideremos una combinación lineal de los elementos de este conjunto e igualémosla al polinomio cero,

$$\alpha_0 + \alpha_1 (1+x) + \ldots + \alpha_{n-1} (1+x)^{n-1} + \alpha_n (1+x)^n = 0. \tag{1}$$

Puesto que el coeficiente del término de grado n en el polinomio de la izquierda es α_n y en el de la derecha es cero, se tiene que $\alpha_n = 0$ y, sustituyendo este valor en (1), se obtiene

$$\alpha_0 + \alpha_1 (1+x) + \ldots + \alpha_{n-1} (1+x)^{n-1} = 0.$$

Puesto que, por hipótesis de inducción, $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)\}$ es linealmente independiente, se tiene que $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$. Por lo tanto, el conjunto $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$ es linealmente independiente.

Así pues, $\{p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$ es linealmente independiente para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. $\mathbb{P}_n$ es un espacio vectorial de dimensión $n+1$ (ya que el conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base). Puesto que B es un conjunto de $n+1$ vectores de $\mathbb{P}_n$ linealmente independientes (demostrado en el apartado anterior), B es una base de $\mathbb{P}_n$.

3. **a)** Sustituyendo en la expresión general de f_n, se tiene

$$(f_n(p_k))(x) = (1+x)^n p_k\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = (1+x)^n \left(1 + \frac{1-x}{1+x}\right)^k =$$
$$= (1+x)^n \left(\frac{2}{1+x}\right)^k = (1+x)^{n-k} 2^k = 2^k p_{n-k}(x).$$

b) La matriz asociada a f_n respecto de la base B, se obtiene poniendo en columnas las coordenadas, en la base B, de las imágenes por f_n de los vectores de B. Sabemos, por el apartado anterior, que

$$\begin{aligned}
(f_n(p_0))(x) &= 2^0 p_n(x),\\
(f_n(p_1))(x) &= 2^1 p_{n-1}(x),\\
&\vdots\\
(f_n(p_{n-1}))(x) &= 2^{n-1} p_1(x),\\
(f_n(p_n))(x) &= 2^n p_0(x),
\end{aligned}$$

por lo que, la matriz pedida es

$$M_B(f_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & \cdots & 2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \diagup & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) La matriz asociada a la composición de dos aplicaciones lineales es el producto de las matrices asociadas a cada una de ellas. Por lo tanto, la matriz asociada a la aplicación $f_n \circ f_n$, respecto de la base B, es el producto por sí misma de la matriz del apartado anterior. Así pues, se tiene

$$M_B(f_n \circ f_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^n \\ 0 & 0 & \cdots & 2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \diagup & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^n I,$$

donde I es la matriz identidad de orden n. Por lo tanto,

$$((f_n \circ f_n)(p))(x) = 2^n \cdot p(x). \tag{2}$$

d) Un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se dice que es un valor propio de f_n si existe un vector no nulo en $\mathbb{P}_n$, $p(x) \neq 0$, al que llamamos vector propio asociado a λ, tal que

$$(f_n(p))(x) = \lambda p(x). \tag{3}$$

Aplicando f_n a ambos miembros de (3), se obtiene

$$((f_n \circ f_n)(p))(x) = \lambda (f_n(p))(x),$$

y sustituyendo (2) y (3) en el primero y segundo miembros de la igualdad, respectivamente, se tiene

$$2^n \cdot p(x) = \lambda^2 \cdot p(x),$$

de donde $\lambda^2 = 2^n$. Por lo tanto, los valores propios de f_n son $\lambda_1 = 2^{n/2}$ y $\lambda_2 = -2^{n/2}$

e) Sabemos que f_4 es diagonalizable si, y sólo si, existe una base de $\mathbb{P}_4$ formada por vectores propios. Por lo tanto, la demostración consiste en encontrar un conjunto de 5 vectores propios linealmente independientes.

Dado un polinomio $p(x) \neq 0$, cuya expresión como combinación lineal de los vectores de la base B es la siguiente:

$$p(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + a_2 p_2(x) + a_3 p_3(x) + a_4 p_4(x), \tag{4}$$

$p(x)$ es vector propio de f_4 si se cumple

$$(f_4(p))(x) = \lambda p(x), \tag{5}$$

para $\lambda = 2^2$, o bien, $\lambda = -2^2$.

Sustituyendo (4) en (5) y aplicando la linealidad de f_4 y el resultado obtenido en el apartado a), se tiene

$$a_0 p_4(x) + a_1 2 p_3(x) + a_2 2^2 p_2(x) + a_3 2^3 p_1(x) + a_4 2^4 p_0(x) =$$

$$\lambda a_0 p_0(x) + \lambda a_1 p_1(x) + \lambda a_2 p_2(x) + \lambda a_3 p_3(x) + \lambda a_4 p_4(x).$$

Puesto que la expresión de un vector como combinación lineal de los vectores de una base es única, se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda a_0 &= a_4 2^4, \\ \lambda a_1 &= a_3 2^3, \\ \lambda a_2 &= a_2 2^2, \\ \lambda a_3 &= a_1 2, \\ \lambda a_4 &= a_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Para $\lambda = 2^2$, el anterior sistema de ecuaciones se convierte en

$$\begin{aligned} a_0 &= 2^2 a_4, \\ a_1 &= 2a_3, \end{aligned}$$

de donde $p(x) = a_4 (2^2 p_0(x) + p_4(x)) + a_3 (2p_1(x) + p_3(x)) + a_2 p_2(x)$, con $a_4, a_3, a_2 \in \mathbb{R}$, es vector propio de f_4 asociado al valor propio $\lambda = 2^2$. Así pues, el conjunto

$$\{4p_0(x) + p_4(x), 2p_1(x) + p_3(x), p_2(x)\}$$

está formado por tres vectores propios asociados al valor propio $\lambda = 2^2$ que, además, son linealmente independientes.

Para $\lambda = -2^2$, el sistema (6) se convierte en

$$\begin{aligned} a_0 &= -2^2 a_4, \\ a_1 &= -2a_3, \\ a_2 &= 0, \end{aligned}$$

de donde $p(x) = a_4(-2^2 p_0(x) + p_4(x)) + a_3(-2p_1(x) + p_3(x))$, con $a_4, a_3 \in \mathbb{R}$, es vector propio de f_4 asociado al valor propio $\lambda = -2^2$. Así pues, el conjunto

$$\{-4p_0(x) + p_4(x), -2p_1(x) + p_3(x)\}$$

está formado por dos vectores propios asociados al valor propio $\lambda = -2^2$ que, además, son linealmente independientes.

Puesto que los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes, el conjunto

$$\{4p_0(x) + p_4(x), 2p_1(x) + p_3(x), p_2(x), -4p_0(x) + p_4(x), -2p_1(x) + p_3(x)\}$$

es una base de $\mathbb{P}_4$ formada por vectores propios y f_4 es diagonalizable.