VIII Premios Jorge Juan de La Universidad de Alicante
Métodos Numéricos

Problema

Supongamos que A y B admiten matriz inversa, A^{-1} y B^{-1}, respectivamente.
Sea $D = B - A$, $\delta = \|D\|\|B^{-1}\|$ y $\varepsilon = \|D\|\|A^{-1}\|$.
Supondremos que las normas que intervienen en el enunciado son normas matriciales.

1.- Pruebe que

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|\|B - A\|\|B^{-1}\|. \tag{1}$$

2.- Pruebe que

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\delta}\|B^{-1}\| \tag{2}$$

y, como consecuencia, que

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\delta}{1-\delta}\|B^{-1}\|. \tag{3}$$

3.- Sea $x = A^{-1}b$ y $x + \triangle x = (A + D)^{-1}b = B^{-1}b$.
Demuestre que

(3a)

$$\|\triangle x\| \leq \frac{\delta}{1-\delta}\|x + \triangle x\|, \tag{4}$$

y también que

(3b)

$$\|\triangle x\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|. \tag{5}$$

Ayuda: Para probar las dos últimas desigualdades empiece por establecer las igualdades

$$(A^{-1} - B^{-1})b = A^{-1}(B - A)B^{-1}b \text{ y } (B^{-1} - A^{-1})b = B^{-1}(A - B)A^{-1}b,$$

y siga, con pequeños retoques, la estrategia utilizada para probar (2) y (3).

Solución.

1.- Es evidente que

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}.$$

Si tenemos en cuenta la condición de submultiplicidad de las normas matriciales, el problema está resuelto.

2.- Aplicando propiedades conocidas de las normas, podemos escribir

$$\|A^{-1}\| - \|B^{-1}\| \leq \|A^{-1} - B^{-1}\|,$$

y, por (1) y teniendo en cuenta el valor de δ, se obtiene

$$\|A^{-1}\| - \|B^{-1}\| \leq \delta\|A^{-1}\|.$$

La obtención de (2) y (3) es ahora inmediata.

3.- Resolveremos sólo (3a), puesto que (3b) se obtiene de forma análoga. Siguiendo la estrategia del ejercicio 2.-, escribimos

$$\begin{aligned}\|A^{-1}b\| - \|B^{-1}b\| &\leq \|(A^{-1} - B^{-1})b\| \\ &= \|(B^{-1} - A^{-1})b\| = \|B^{-1}(A - B)A^{-1}b\| \\ &\leq \underbrace{\|B^{-1}\|\|D\|}_{\delta}\|A^{-1}b\|.\end{aligned}$$

Así, pues,

$$\|A^{-1}b\| \leq \frac{1}{1-\delta}\|B^{-1}b\|.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}&\|-\triangle x\| = \|(A^{-1} - B^{-1})b\| = \|(B^{-1} - A^{-1})b\| \\ &= \|B^{-1}(A-B)A^{-1}b\| \leq \delta\|A^{-1}b\| \leq \frac{\delta}{1-\delta}\|B^{-1}b\| = \frac{\delta}{1-\delta}\|x+\triangle x\|.\end{aligned}$$