VII PREMIO JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Alicante, 5 de noviembre de 2004

GEOMETRÍA CLÁSICA

1. Una familia de cinco circunferencias tiene la propiedad de que cada cuatro de ellas tienen un punto común. Probar que las cinco circunferencias tienen un punto común.

2. Demostrar que cualquier tetraedro $ABCD$ **es *cubierto* por tres esferas de diámetros** AB, AC **y** $AD.$

VII PREMIO JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS
DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Alicante, 5 de noviembre de 2004

GEOMETRÍA CLÁSICA

1. Una familia de cinco circunferencias tiene la propiedad de que cada cuatro de ellas tienen un punto común. Probar que las cinco circunferencias tienen un punto común.

SOLUCIÓN:
Supongamos que la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª circunferencias pasen por el punto A, que la 1ª, 2ª, 3ª y 5ª circunferencias pasen por el punto B y que la 1ª, 2ª, 4ª y 5ª circunferencias pasen por el punto C. Entonces A, B y C están en la 1ª y 2ª circunferencias. Sin embargo dos circunferencias distintas no pueden tener más de dos puntos comunes. Por tanto dos de esos tres puntos deben coincidir. Necesariamente las cinco circunferencias tienen un punto en común.

2. Demostrar que cualquier tetraedro $ABCD$ **es *cubierto* por tres esferas de diámetros** AB, AC **y** AD.

SOLUCIÓN:
Sean *K, L, M* y *H* respectivamente los pies de las perpendiculares de A las aristas *CD, DB, BC* y al plano *BCD*. Como los ángulos $\angle AHB$, $\angle ALB$ y $\angle AMB$ valen 90°, la pirámide $ABHLM$ está contenida (o es cubierta) por la esfera de diámetro AB. Análogamente la pirámide $ACHMK$ está contenida en la esfera de diámetro AC y la pirámide $ADHKL$ está contenida en la esfera de diámetro AD.
Ya que cada punto del tetraedro está en una de esas tres pirámides, el tetraedro inicial $ABCD$ está contenido (o es cubierto) por la unión de las tres esferas de diámetros AB, AC y AD.