VII PREMIO JORGE JUAN

ANÁLISIS MATEMÁTICO. Primer ciclo.

Alicante, 5 de noviembre de 2004.

Sea $1 < a < \infty$, definimos $a_1 = a$ y $a_{n+1} = a^{a_n}$ para n natural. Sea $b = \log a$ y $f(x) = e^{bx}$.

1. Demostrar que $f(1) = a$, $f(a_n) = a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y que si a_n converge a α, $f(\alpha) = \alpha$.

2. Estudiar la convergencia de la sucesión en los casos $b > \frac{1}{e}$ y $b \leq \frac{1}{e}$.

SOLUCIÓN:
El primer apartado es trivial, simplemente se trata de dar una indicación de por donde se puede atacar el apartado siguiente. La idea que se puede sacar de este primer apartado es que si la sucesión tiene límite entonces dicho límite es un punto fijo de la función.

Con esta idea se demuestra que en un caso la función no puede tener ningún punto fijo, mientras que en el otro caso se llega a la existencia y unicidad de dicho punto fijo.