

VII PREMIO JORGE JUAN

05/11/04

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Sean $u = u(x, y, z, t)$ y $v = v(x, y, z, t)$ dos funciones implícitas de las variables independientes x, y, z, t definidas implícitamente por el sistema $\begin{cases} u = z + x\varphi(u, v) \\ v = t + y\psi(u, v) \end{cases}$, siendo $\varphi, \psi \in C^1(A)$ dos funciones dadas y $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto no vacío.

Si $f \in C^1(A)$ es una función arbitraria, demostrar con rigor y claridad que:

$$f_x = \varphi f_z \text{ y } f_y = \psi f_t.$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Sean $u = u(x, y, z, t)$ y $v = v(x, y, z, t)$ dos funciones implícitas de las variables independientes x, y, z, t definidas implícitamente por el sistema $\begin{cases} u = z + x\varphi(u, v) \\ v = t + y\psi(u, v) \end{cases}$, siendo $\varphi, \psi \in C^1(A)$ dos funciones dadas y $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto no vacío.

Si $f \in C^1(A)$ es una función arbitraria, demostrar con rigor y claridad que:

$$f_x = \varphi f_z \text{ y } f_y = \psi f_t.$$

SOLUCIÓN:

Sean $F(x, y, z, t, u, v) = z + x\varphi(u, v) - u$ y $G(x, y, z, t, u, v) = t + y\psi(u, v) - v$.

El sistema dado (*) $\begin{cases} u = z + x\varphi(u, v) \\ v = t + y\psi(u, v) \end{cases}$, se escribe como $\begin{cases} F(x, y, z, t, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, t, u, v) = 0 \end{cases}$, siendo F

y G de clase uno en un cierto abierto no vacío de \mathbb{R}^6 . (1)

El jacobiano

$$J \begin{pmatrix} F & G \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\varphi_u - 1 & x\varphi_v \\ y\psi_u & y\psi_v - 1 \end{vmatrix} = (x\varphi_u - 1)(y\psi_v - 1) - xy\varphi_v\psi_u \neq 0. \quad (2)$$

Las condiciones (1) y (2) las verifica el sistema (*) porque define las dos funciones implícitas $u = u(x, y, z, t)$ y $v = v(x, y, z, t)$.

f es una función de u y v , que a su vez son funciones implícitas de las variables

$$\text{independientes } x, y, z, t. \text{ Entonces: } \begin{cases} f_x = f_u u_x + f_v v_x \\ f_y = f_u u_y + f_v v_y \\ f_z = f_u u_z + f_v v_z \\ f_t = f_u u_t + f_v v_t \end{cases}.$$

Probar que,

$$f_x = \varphi f_z \Leftrightarrow f_u u_x + f_v v_x = f_u \varphi u_z + f_v \varphi v_z \Leftrightarrow f_u (u_x - \varphi u_z) + f_v (v_x - \varphi v_z) = 0.$$

Basta demostrar que $u_x - \varphi u_z = 0$ y $v_x - \varphi v_z = 0$ (I)

Análogamente probar que $f_y = \psi f_t \Leftrightarrow f_u (u_y - \psi u_t) + f_v (v_y - \psi v_t) = 0.$

Basta por tanto demostrar que $u_y - \psi u_t = 0$ y $v_y - \psi v_t = 0$ (II)

Diferenciando el sistema (*) $\begin{cases} u = z + x\varphi(u, v) \\ v = t + y\psi(u, v) \end{cases}$ se obtiene:

$$\begin{cases} du = dz + \varphi dx + x\varphi_u du + x\varphi_v dv \\ dv = dt + \psi dy + y\psi_u du + y\psi_v dv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x\varphi_u)du - x\varphi_v dv = \varphi dx + dz \\ -y\psi_u du + (1 - y\psi_v)dv = \psi dy + dt \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por Cramer en du y dv y haciendo notar que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - x\varphi_u & -x\varphi_v \\ -y\psi_u & 1 - y\psi_v \end{vmatrix} \neq 0, \text{ se deduce que}$$

$$du = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \varphi dx + dz & -x\varphi_v \\ \psi dy + dt & 1 - y\psi_v \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad dv = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 - x\varphi_u & \varphi dx + dz \\ -y\psi_u & \psi dy + dt \end{vmatrix}. \text{ Entonces:}$$

$$du = \frac{1}{\Delta} [(1 - y\psi_v)\varphi dx + x\varphi_v\psi dy + (1 - y\psi_v)dz + x\varphi_v dt] \quad \text{y}$$

$$dv = \frac{1}{\Delta} [y\psi_u\varphi dx + (1 - x\varphi_u)\psi dy + y\psi_u dz + (1 - x\varphi_u)dt].$$

Por tanto $u_x = \frac{1}{\Delta}(1 - y\psi_v)\varphi$, $u_z = \frac{1}{\Delta}(1 - y\psi_v)$, lo que implica que $u_x = \varphi u_z$. (i)

$v_x = \frac{1}{\Delta}y\psi_u\varphi$, $v_z = \frac{1}{\Delta}y\psi_u$, lo que implica que $v_x = \varphi v_z$. (ii)

(i) y (ii) son precisamente (I).

Similarmente $u_y = \frac{1}{\Delta}x\varphi_v\psi$, $u_t = \frac{1}{\Delta}x\varphi_v$, lo que implica que $u_y = \psi u_t$. (iii)

$v_y = \frac{1}{\Delta}(1 - x\varphi_u)\psi$, $v_t = \frac{1}{\Delta}(1 - x\varphi_u)$, lo que implica que $v_y = \psi v_t$. (iv)

(iii) y (iv) son (II).