VII PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

Se considera el espacio vectorial real V de las funciones reales de una variable, definidas en la recta real, con las operaciones ordinarias de suma y producto por un escalar. Si $\Phi : \mathbb{R}^3 \to V$ es la aplicación que hace corresponder a cada elemento (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ la función $f_{(a,b,c)}$ definida por

$$f_{(a,b,c)}(t) = a \operatorname{sen}^2 t + b \cos^2 t + c, \qquad t \in \mathbb{R},$$

se pide:

1. Probar que Φ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en V.
2. Hallar una base del núcleo y otra de la imagen de dicha aplicación.
3. Clasificar la aplicación.
4. Calcular $\Phi(U)$, donde U es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.
5. Si W es la imagen de Φ y $\Psi : \mathbb{R}^3 \to W$ es la aplicación lineal definida como $\Psi(a, b, c) = \Phi(a, b, c)$, calcular la matriz asociada a Ψ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base de W obtenida en el apartado 2.

SOLUCIÓN:

1. Para demostrar que Φ es una aplicación lineal, debemos comprobar que, cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y (a, b, c), $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, se verifica la igualdad de las funciones

   $$\Phi(\alpha(a, b, c) + \beta(u, v, w)) = \Phi(\alpha a + \beta u, \alpha b + \beta v, \alpha c + \beta w) = f_{(\alpha a+\beta u, \alpha b+\beta v, \alpha c+\beta w)}$$

   y

   $$\alpha\Phi(a, b, c) + \beta\Phi(u, v, w) = \alpha f_{(a,b,c)} + \beta f_{(u,v,w)}.$$

   Puesto que, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, se tiene la igualdad de

   $$f_{(\alpha a+\beta u, \alpha b+\beta v, \alpha c+\beta w)}(t) = (\alpha a + \beta u) \operatorname{sen}^2 t + (\alpha b + \beta v) \cos^2 t + (\alpha c + \beta w)$$

   y

$$\left(\alpha f_{(a,b,c)} + \beta f_{(u,v,w)}\right)(t) = \alpha f_{(a,b,c)}(t) + \beta f_{(u,v,w)}(t) = \alpha\left(a \operatorname{sen}^2 t + b \cos^2 t + c\right) + \beta\left(u \operatorname{sen}^2 t + v \cos^2 t + w\right),$$

   ambas funciones son iguales y Φ es una aplicación lineal.

2. El núcleo de Φ es el conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas imágenes por Φ coinciden con la función constante cero, es decir,

$$\ker \Phi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x,y,z) = f_{(x,y,z)} = 0\right\}.$$

Buscamos, pues, los vectores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $f_{(x,y,z)}(t) = 0(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir,

$$x \operatorname{sen}^2 t + y \cos^2 t + z = 0 \tag{1}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Si tomamos $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{2}$, (1) se convierte, respectivamente, en $y + z = 0$ y $x + z = 0$, de donde $x = y = -z$ que es solución de (1) para cualquier $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\ker \Phi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = -z\right\} = \{(x,x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} = L\{(1,1,-1)\}$$

y $\{(1,1,-1)\}$ es una base de $\ker \Phi$.

Por otra parte,

$$\dim \ker \Phi + \dim \operatorname{img} \Phi = \dim \mathbb{R}^3 = 3,$$

de donde se deduce que $\dim \operatorname{img} \Phi = 2$.

La imagen de Φ es el subespacio de V generado por las imágenes de los vectores de una base de $\mathbb{R}^3$. Si tomamos, por ejemplo, la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene

$$\operatorname{img} \Phi = L\{\Phi(1,0,0), \Phi(0,1,0), \Phi(0,0,1)\} = L\left\{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, 1\right\}.$$

Puesto que la función constante 1 es combinación lineal de las funciones $\operatorname{sen}^2 t$ y $\cos^2 t$, una base de $\operatorname{img} \Phi$ es $\{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$.

3. Φ no es inyectiva, ya que el núcleo contiene vectores de $\mathbb{R}^3$ distintos del vector cero, y tampoco es suprayectiva, ya que $\dim \operatorname{img} \Phi = 2 < \dim V = \infty$.

4. Puesto que

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\right\} = \{(x,x,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} = L\{(1,1,0), (0,0,1)\},$$

se tiene

$$\Phi(U) = L\{\Phi(1,1,0), \Phi(0,0,1)\} = L\{1\},$$

es decir, $\Phi(U)$ es el subespacio de las funciones constantes en $\mathbb{R}$.

5. Consideramos $\Psi : \mathbb{R}^3 \to W$ la aplicación lineal definida como $\Psi(a,b,c) = \Phi(a,b,c)$ y conside ramos en $\mathbb{R}^3$ la base canónica C y en W la base $B = \{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$. Puesto que $\Phi(1,0,0) = \operatorname{sen}^2 t$, $\Phi(0,1,0) = \cos^2 t$ y $\Phi(0,0,1) = 1 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$, la matriz asociada a Ψ respecto de las bases C y B es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.