

VI Premios Jorge Juan de La Universidad de
Alicante
Métodos Numéricos

Problema

Sea B_n una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \dots & \dots & b_{n-1} & b_n \\ a & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a & 0 \end{pmatrix},$$

con $b_j = \frac{K}{2^j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

- a) Consideremos el caso en que a y K son reales no negativos. Responda a las preguntas siguientes:
- i) Si n es par, ¿pueden ser todos los valores propios de B_n reales positivos?
 - ii) ¿Pueden ser negativas todas las partes reales de los valores propios de B_n ?
- b) Calcule los valores propios de B_n para $a = 2$ y $K = -2$.
- c) Considere un método iterativo del tipo

$$x^{(k+1)} = B_n x^{(k)} + c,$$

donde c es un número cualquiera. Estudie la convergencia de este método para $|a| < 1$ y $|K| \leq 1$.