VI PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

En el espacio vectorial $\mathbb{P}_n$ de los polinomios en una variable con coeficientes reales de grado menor o igual que n, $n \in \mathbb{N}$, se considera la aplicación lineal $h : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ dada por

$$h\left[p\left(t\right)\right] = p\left(t+1\right) - p\left(t-1\right) + p(t).$$

Se pide:

1. Calcular $h\left[p_k\left(t\right)\right]$ para $p_k\left(t\right) = t^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.
2. Obtener la matriz de h respecto de la base canónica de $\mathbb{P}_n$.
3. Calcular el núcleo y la imagen de h.
4. Clasificar la aplicación.
5. Para $n = 3$, obtener la matriz de h respecto de la base $\left\{1, t-1, \left(t-1\right)^2, \left(t-1\right)^3\right\}$.

SOLUCIÓN

1. $h\left[p_0\left(t\right)\right] = p_0\left(t+1\right) - p_0\left(t-1\right) + p_0(t) = 1 - 1 + 1 = 1.$

$$h\left[p_k\left(t\right)\right] = p_k\left(t+1\right) - p_k\left(t-1\right) + p_k(t) = \left(t+1\right)^k - \left(t-1\right)^k + t^k = \binom{k}{0}t^k + \binom{k}{1}t^{k-1} + \ldots +$$

$$\binom{k}{k-1}t + \binom{k}{k} - \left[\binom{k}{0}t^k + \binom{k}{1}t^{k-1}\left(-1\right) + \ldots + \binom{k}{k-1}t\left(-1\right)^{k-1} + \binom{k}{k}\left(-1\right)^k\right] + t^k =$$

$$\binom{k}{0}t^k + \binom{k}{1}t^{k-1} + \ldots + \binom{k}{k-1}t + \binom{k}{k} - \binom{k}{0}t^k + \binom{k}{1}t^{k-1} + \ldots - \binom{k}{k-1}t\left(-1\right)^{k-1} - \binom{k}{k}\left(-1\right)^k + t^k =$$

$$\begin{cases} t^k + 2\binom{k}{1}t^{k-1} + 2\binom{k}{3}t^{k-3} + \ldots + 2\binom{k}{k-1}t, & k \geq 2 \; par \\ t^k + 2\binom{k}{1}t^{k-1} + 2\binom{k}{3}t^{k-3} + \ldots + 2\binom{k}{k}, & k \geq 1 \; impar \end{cases}.$$

2. Si n es impar, la matriz pedida es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & & & 2\binom{n-1}{n-2} & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & 0 & 2\binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 2\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si n es par, la matriz pedida es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & & & 0 & 2\binom{n}{n-1} \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & 2\binom{n-1}{n-3} & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & 2\binom{n}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 2\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Para calcular el núcleo de h tenemos que buscar los polinomios $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in \mathbb{P}_n$ tales que $h[p(t)] = 0$. Esto, planteado en forma matricial, es equivalente a resolver el sistema homogéneo

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $\det A = 1$, dicho sistema homogéneo es compatible determinado y su única solución es $p(t) = 0$. Por lo tanto, $\ker h = \{0\}$.

Por otra parte, sabemos que $\dim(\operatorname{img} h) = \dim \mathbb{P}_n - \dim(\ker h) = n + 1$ y $\operatorname{img} h \subset \mathbb{P}_n$, por lo que $\operatorname{img} h = \mathbb{P}_n$.

4. La aplicación es inyectiva, por ser $\ker h = \{0\}$, y suprayectiva, por ser $\operatorname{img} h = \mathbb{P}_n$. Por lo tanto, h es biyectiva.

5. Sea $B = \{q_0(t), q_1(t), q_2(t), q_3(t)\} = \left\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\right\}$. Calculamos las imágenes por h de los vectores de B y las ponemos como combinaciones lineales de los vectores de B.

$h[q_0(t)] = 1 = q_0(t)$.

$h[q_1(t)] = q_1(t+1) - q_1(t-1) + q_1(t) = (t+1-1) - (t-1-1) + (t-1) = 2 + (t-1)$.

$h[q_1(t)] = 2q_0(t) + q_1(t)$.

$h[q_2(t)] = q_2(t+1) - q_2(t-1) + q_2(t) = (t+1-1)^2 - (t-1-1)^2 + (t-1)^2 =$

$4(t-1) + (t-1)^2 = 4q_1(t) + q_2(t)$.

$h[q_3(t)] = q_3(t+1) - q_3(t-1) + q_3(t) = (t+1-1)^3 - (t-1-1)^3 + (t-1)^3 =$

$2 + 6(t-1)^2 + (t-1)^3 = 2q_0(t) + 6q_2(t) + q_3(t)$.

Por lo tanto, la matriz pedida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$