V PREMIOS JORGE JUAN
Métodos Numéricos

La mayoría de los métodos iterativos para resolver la ecuación $f(x) = 0$ pasan por transformar esta ecuación en otra equivalente de la forma $x = g(x)$, convirtiendo el problema original en uno de punto fijo, pero con la ventaja de tener una expresión que proporciona cada término de la sucesión en función del anterior

$$x^{r+1} = g(x^r).$$

Sea α la solución buscada y supongamos que la función g es derivable. Una forma de medir la velocidad de convergencia del método es mediante el cociente entre dos errores consecutivos:

$$\frac{x^{r+1} - \alpha}{x^r - \alpha}.$$

Cuanto menor sea el cociente anterior, más rápidamente se aproxima la sucesión al punto fijo.

1 Siendo $\lambda \neq -1$, indique como puede obtenerse a partir del problema de punto fijo $x = g(x)$ el problema equivalente

$$x = \frac{\lambda x}{1+\lambda} + \frac{1}{1+\lambda} g(x).$$

2 Según las consideraciones anteriores, ¿qué valores debería tomar λ para que este nuevo método fuera rápidamente convergente?

3. Aplíquese el apartado anterior para aproximar una raíz próxima a 0.5 de la ecuación $1 - x - \lim \operatorname{sen}(x) = 0$, efectuando tres iteraciones.

Nota: Puede utilizarse calculadora. La solución exacta (con 8 cifras decimales es 0.51097343)

Solución

1 Sumando λx a ambos miembros de la igualdad $x = g(x)$ se obtiene

$$(1+\lambda)x = \lambda x + g(x)$$

y teniendo en cuenta que $\lambda \neq -1$, podemos dividir por $1+\lambda$ para obtener la expresión deseada.

2 Es evidente que

$$\lim_r \frac{x^{r+1}-\alpha}{x^r-\alpha} = \lim_r \frac{g(x^r)-g(\alpha)}{x^r-\alpha} = g'(\alpha).$$

Así, pues, el segundo método convergerá rápidamente si $\left|\frac{x^{r+1}-\alpha}{x^r-\alpha}\right|$ es muy pequeño. α debe elegirse de forma que $\left|\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}+\frac{1}{1+\lambda}g(\alpha)\right)'\right|$ esté próximo a cero.

Es decir, $\boxed{\lambda \approx -g(\alpha)'.}$

3 En nuestro caso, $\lambda \approx \cos(.5) = 0.9$, con lo que las tres primeras iteraciones proporcionan los valores 0.510828, 0.510971, 0.510973.