V PREMIOS JORGE JUAN (2002)

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Una aerolínea cuenta con cinco tipos de avión, A, B, C, D y E, que tienen planes de limpieza diferentes. Hay un único hangar de limpieza, ubicado en el aeropuerto base, que está abierto las 24 horas del día, y que sólo puede operar en cinco configuraciones, (A,B,D), (A,D,E), (A,C,E), (B,C,D) y (B,C,E), pudiendo ser atendidos simultáneamente cualquier número de aviones de la configuración que esté operativa. Diariamente, llegan a la base 9 aviones de tipo A, 10 de tipo B, 14 de tipo C, 12 de tipo D y 15 de tipo E, aterrizando una sola vez a lo largo del día y con horario de llegada aleatorio. Sería deseable proceder a la limpieza de todos ellos, pero existe un protocolo que establece que se dejará para mejor ocasión la limpieza de aquellos aviones que no puedan ser atendidos en el momento de su llegada. El departamento de planificación debe decidir qué parte del tiempo total de funcionamiento del hangar conviene dedicar a cada configuración.

(a) Calcule los números esperados de aviones de cada tipo que no podrán ser atendidos en cada una de las siguientes alternativas: (I) se dedica la mitad del tiempo a cada una de las dos primeras configuraciones (y nada a las otras tres); (II) se dedicar el mismo tiempo a las cinco configuraciones; y (III) se dedican los siguientes porcentajes del tiempo total a cada una de ellas (en ese orden): 2’39, 30’64, 15’60, 28’44 y 22’93.

(b) Si se desea minimizar el número esperado de aviones no atendidos a su llegada, sin distinción de tipo, ¿es óptima alguna de las decisiones descritas en (a)? Justifique la respuesta.

(c) Si se desea minimizar el máximo del número esperado de aviones de cada tipo que no podrán ser atendidos a su llegada, ¿está cerca de ser óptima alguna de las decisiones descritas en (a)? Justifique la respuesta.

Solución

(a) Sea x_i = "parte del tiempo dedicado a la configuración i", $i = 1,...,5$. Tenemos una distribución discreta de probabilidad, que permite calcular la esperanza de que un tipo de avión sea atendido. Así, los aviones tipo A pueden ser atendidos en las configuraciones 1, 2 y 3, que acumulan una probabilidad $x_1 + x_2 + x_3$; la probabilidad de que no sea atendido uno de esos aviones es $1 - (x_1 + x_2 + x_3) = x_4 + x_5$, y el número esperado de aviones de tipo A no atendidos durante el día es $9(x_4 + x_5)$. De forma análoga se calculan las otras 4 esperanzas matemáticas, que valen $10(x_2 + x_3)$, $14(x_1 + x_2)$, $12(x_3 + x_5)$ y $15(x_1 + x_4)$. La siguiente tabla muestra los aviones de cada tipo que (esperamos) no serán atendidos:

	I	II	III
A	0	3’6	4’624
B	5	4	4’624
C	14	5’6	4’624
D	0	4’8	4’624
E	7’5	6	4’624

(b) Se trata de minimizar la suma de las cinco esperanzas:

$$\begin{array}{lll} (P_1) & Min & 29x_1 + 24x_2 + 22x_3 + 24x_4 + 21x_5 \\ & s.a & x_1 + ... + x_5 = 1 \\ & & x_i \geq 0, i = 1,...,5. \end{array}$$

Como el conjunto factible de (P_1) es un polítopo, el mínimo se alcanzará en uno de sus vértices, que tienen una sola coordenada positiva, con valor 1. El mejor vértice es, obviamente, $(0,0,0,0,1)$. La solución óptima es dejar fija la quinta configuración, lo que dejará sin atender 21 aviones, que es menos de lo que corresponde a I (26’5), II (24) y III (23’12), por lo que ninguna de las tres decisiones consideradas en (a) es óptima.

(c) Llamando

$$f(x_1,...,x_5) = \max\{9(x_4 + x_5), 10(x_2 + x_3), 14(x_1 + x_2), 12(x_3 + x_5), 15(x_1 + x_4)\},$$

el problema a resolver es

$$\begin{array}{lll} (P_2) & Min & f(x_1,...,x_5) \\ & s.a & x_1 + ... + x_5 = 1 \\ & & x_i \geq 0, i = 1,...,5. \end{array}$$

Los números máximos esperados correspondientes a I, II y III son 14, 6 y $4'624$, respectivamente, por lo que de las tres decisiones, la única que podría ser óptima es III. Para chequear su optimalidad no sirve (P_2), porque su función objetivo f no es diferenciable. Por eso conviene reformular el problema llamando $z = f(x_1,...,x_5)$. Obtenemos así el problema de programación lineal equivalente

$$
\begin{array}{lll}
(P_3) & Min & z \\
 & s.a & 9(x_4+x_5) \leq z \\
 & & 10(x_2+x_3) \leq z \\
 & & 14(x_1+x_2) \leq z \\
 & & 12(x_3+x_5) \leq z \\
 & & 15(x_1+x_4) \leq z \\
 & & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 1 \\
 & & x_i \geq 0, i = 1,...,5.
\end{array}
$$

La solución factible correspondiente a III es

$$x_1 = 0'0239, x_2 = 0'3064, x_3 = 0'1560, x_4 = 0'2844, x_5 = 0'2294, z = 4'624.$$

Son aproximadamente activas en (P_3) las seis primeras restricciones. Tras escribir las desigualdades como "$\geq$", se comprueba que se cumple la condición de KKT con multiplicadores $\frac{28}{67}$, 0, $\frac{18}{67}$, $\frac{21}{67}$, 0 (no negativos) y $\frac{252}{67}$ (este signo no importa). En conclusión, la solución óptima de (P_3) es la solución (única) del sistema de 6 ecuaciones y otras tantas incógnitas correspondientes a las 6 primeras restricciones. Obviamente, dicha solución está muy próxima a III.

Puede llegarse a la misma conclusión mediante el método simplex, pero es más trabajoso, sin excluir otros argumentos más o menos ingeniosos.