PREMIOS JORGE JUAN

PROBLEMAS DE ESTADÍSTICA

(AÑO 2002) Sea X variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1-\theta & \text{si} \quad -\frac{1}{2} \le x \le 0 \\ 1+\theta & \text{si} \quad 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo $\theta \in [0, 1[$ un parámetro desconocido. A partir de una muestra aleatoria simple de X de tamaño n:

a) Demostrar que $S(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} I_{]0,\infty[}(X_i)$ es un estadístico suficiente y completo para ?. Describir este estadístico.

NOTA: La función indicadora $I_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ es tal que $I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$, siendo $A \subset \mathbb{R}$.

b) Calcular el estimador insesgado de mínima varianza de ?.

c) Demostrar que X pertenece a la familia exponencial uniparamétrica, y que S es un estimador eficiente para cierta función g(?), especificando dicha función. ¿Podemos desde este punto deducir el estimador eficiente para ?? Razona tu respuesta.

d) Si en c) la respuesta fue negativa, calcular el estimador eficiente para ?.