IV PREMIOS JORGE JUAN

Un anillo $(A, +, \cdot)$ es un anillo booleano si $x^2 = x$ para todo $x \in A$. Demuestre que si $(A, +, \cdot)$ es un anillo booleano, entonces se veri can las siguientes propiedades:

(i) A es conmutativo.

(ii) $x + x = e$ para todo $x \in A$ (e representa el elemento neutro para la operación $+$ de A).

(iii) $xy\,(x + y) = e$ para todo $x, y \in A$.

(iv) La relación

$$x \preceq y \Longleftrightarrow xy = x,$$

$x, y \in A$, es una relación binaria de orden sobre A.

SOLUCIÓN

(i) Por ser A un anillo booleano, para cualquier par de elementos $a, b \in A$, se cumple

$$(a + b)^2 = a + b \tag{0.1}$$

y

$$(ab)^2 = ab. \tag{0.2}$$

Por otra parte, aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto de la suma, se obtiene

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b,$$

por lo que se convierte en $a + ab + ba + b = a + b$ y, aplicando la ley de cancelación del grupo $(A, +)$, se tiene $ab + ba = e$ o, lo que es lo mismo,

$$ab = -ba. \tag{0.3}$$

Como consecuencia de se tiene

$$(ab)^2 = (ab)\,(ab) = (-ba)\,(-ba) = (ba)\,(ba) = (ba)^2 = ba,$$

que junto con da lugar a

$$ab = ba.$$

Por lo tanto, $ab = ba$ para todo $a, b \in A$ y A es un anillo conmutativo.

(ii) Dado cualquier $x \in A$, por ser A booleano, se tiene

$$(x + x)^2 = x + x.$$

Puesto que

$$(x + x)^2 = (x + x)(x + x) = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = (x + x) + (x + x),$$

se tiene

$$(x + x) + (x + x) = x + x.$$

Por lo tanto, $x + x$ es idempotente con respecto de la suma y, puesto que $(A, +)$ es un grupo, $x + x = e$.

(iii) Dados $x, y \in A$, aplicando la propiedad distributiva, se tiene

$$xy(x + y) = (xy)x + (xy)y.$$

Puesto que el producto de A es asociativo y conmutativo (apartado i), obtenemos

$$xy(x + y) = yx^2 + xy^2,$$

que, por ser A booleano y por el apartado ii), se convierte en

$$xy(x + y) = yx + xy = xy + xy = e.$$

(iv) Por ser A booleano, se cumple la propiedad re exiva ya que, para cualquier $x \in A$, $xx = x$ y, por lo tanto, $x \preceq x$.

Si $x, y \in A$ y $x \preceq y$ e $y \preceq x$, entonces se cumple

$$\begin{aligned} xy &= x \\ yx &= y \end{aligned}$$

y, puesto que A es conmutativo

$$x = xy = yx = y.$$

Por lo tanto, se cumple la propiedad antisimétrica.

Por último, si $x, y, z \in A$ y $x \preceq y$ e $y \preceq z$, entonces

$$\begin{aligned} xy &= x \\ yz &= y \end{aligned}$$

de donde

$$xz = (xy)z = x(yz) = xy = x.$$

Así pues, se cumple también la propiedad transitiva y la relación binaria de nida es una relación de orden.