III PREMIOS JORGE JUAN

Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales con una indeterminada, x, de grado menor o igual que dos, en el que se considera la base usual $\{1, x, x^2\}$. Considérese la aplicación $f : V \times V \to \mathbb{R}$,

$$f[p(x), q(x)] = \int_{-1}^{1} [ap(x)q(x) + bp'(x)q(x) + cq'(x)p(x)]\, dx$$

donde $p'(x)$ denota al polinomio derivado de $p(x)$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$ son fijos. Se pide:

1. Comprobar que f es una forma bilineal, determinando su matriz en la base usual.
2. ¿Qué condiciones necesarias deben darse sobre a, b, c para que f defina un producto escalar sobre V?
3. Para $a = 2$ y $b = c = 1/3$, demostrar que f define un producto escalar sobre V.
4. Considerando sobre V el producto escalar del apartado 3, hallar el sub-espacio U ortogonal al polinomio x, hallar una base ortogonal de U y hallar la proyección ortogonal sobre U del polinomio x^2.

SOLUCIÓN:

1. Dados $p_1(x), p_2(x), q(x) \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$f[\alpha p_1(x) + \beta p_2(x), q(x)] = \alpha f[p_1(x), q(x)] + \beta f[p_2(x), q(x)].$$

En efecto,

$$f[\alpha p_1(x) + \beta p_2(x), q(x)] =$$

$$\int_{-1}^{1} [a(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x))q(x) + b(\alpha p_1'(x) + \beta p_2'(x))q(x) + cq'(x)(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x))]\, dx =$$

$$\alpha \int_{-1}^{1} [ap_1(x)q(x) + bp_1'(x)q(x) + cq'(x)p_1(x)]\, dx +$$

$$\beta \int_{-1}^{1} [ap_2(x)q(x) + bp_2'(x)q(x) + cq'(x)p_2(x)]\, dx =$$

$$\alpha f[p_1(x), q(x)] + \beta f[p_2(x), q(x)].$$

De la misma manera, se demuestra que si $p(x), q_1(x), q_2(x) \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$f[p(x), \alpha q_1(x) + \beta q_2(x)] = \alpha f[p(x), q_1(x)] + \beta f[p(x), q_2(x)].$$

Por lo tanto, f es una forma bilineal.

Para determinar la matriz asociada a f en la base usual, debemos calcular las imágenes de todos los pares de vectores de la base que se pueda formar.

$f(1,1) = \int_{-1}^{1} a\, dx = 2a.$

$f(1,x) = \int_{-1}^{1} (ax + c)\, dx = 2c.$

$f(1,x^2) = \int_{-1}^{1} (ax^2 + 2cx)\, dx = \frac{2a}{3}.$

$f(x,1) = \int_{-1}^{1} (ax + b)\, dx = 2b.$

$f(x,x) = \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + cx)\, dx = \frac{2a}{3}.$

$f(x,x^2) = \int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + 2cx^2)\, dx = \frac{2b + 4c}{3}.$

$f(x^2,1) = \int_{-1}^{1} (ax^2 + 2bx)\, dx = \frac{2a}{3}.$

$f(x^2,x) = \int_{-1}^{1} (ax^3 + 2bx^2 + cx^2)\, dx = \frac{4b + 2c}{3}.$

$f(x^2,x^2) = \int_{-1}^{1} (ax^4 + 2bx^3 + 2cx^3)\, dx = \frac{2a}{5}.$

$$G = \begin{pmatrix} 2a & 2c & 2a/3 \\ 2b & 2a/3 & (2b+4c)/3 \\ 2a/3 & (4b+2c)/3 & 2a/5 \end{pmatrix}.$$

2. Puesto que f debe ser simétrica, la matriz G debe serlo también. Por lo tanto, $b = c$. Por otra parte, debe cumplirse que $f[p(x),p(x)] > 0$ para todo $p \neq 0$, por lo que los elementos de la diagonal de G deben ser positivos y $a > 0$.
3. En este caso particular, para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, se tiene

$$f[p(x),q(x)] = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2/3 & 4/3 \\ 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 4/3 & 2/3 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \qquad \#$$

f define un producto escalar sobre V ya que:
a. f es bilineal (apartado 1.).
b. f es simétrica (por serlo la matriz G).
c. $f[p(x),p(x)] > 0$ para todo $p \neq 0$.
En efecto, si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V\backslash\{0\}$,

$$f[p(x),p(x)] = 4a_0^2 + \frac{4}{3}a_1^2 + \frac{4}{5}a_2^2 + \frac{4}{3}a_0a_1 + \frac{8}{3}a_0a_2 + \frac{4}{3}a_1a_2 =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2\right)^2 + \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{4}{3}a_0^2 + \frac{16}{9}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}a_2\right)^2 > 0.$$

4. El polinomio x tiene coordenadas $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con respecto de la base usual de V. Teniendo en cuenta que el producto escalar es el de ref: Ecuación1 ,

$$U = \left\{ q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in V \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2/3 & 4/3 \\ 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 4/3 & 2/3 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$U = \{q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in V \mid b_0 + 2b_1 + b_2 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ -b_0 - 2b_1 \end{pmatrix} \mid b_0, b_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por lo tanto $U = L(\{u_1, u_2\})$ donde $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Para calcular una base ortogonal de U, utilizamos el método de Gram-Schmidt. Sean $\bar{u}_1 = u_1$ y $\bar{u}_2 = u_2 + \alpha u_1$ tales que $f(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$. Entonces, se cumple

$$0 = f(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = f(u_1, u_2) + \alpha f(u_1, u_1) = -\frac{16}{15} + \alpha\frac{32}{15},$$

de modo que $\alpha = 1/2$ y $\bar{u}_2 = (1/2, 1, -5/2)'$. La base ortogonal de U es

$$\left\{1 - x^2, \frac{1}{2} + x - \frac{5}{2}x^2\right\}.$$

Calcularemos ahora la proyección ortogonal sobre U del polinomio x^2. Denotaremos como

$P_U(x^2)$ y $Q_U(x^2)$ las proyecciones de dicho polinomio sobre U y sobre $U^{\perp}$, respectivamente. Dado que $P_U(x^2) \in U$, se cumple que $P_U(x^2) = \alpha\overline{u}_1 + \beta\overline{u}_2$ y

$$x^2 = P_U(x^2) + Q_U(x^2) = \alpha\overline{u}_1 + \beta\overline{u}_2 + Q_U(x^2).$$

Por lo tanto $f(x^2, \overline{u}_1) = \alpha f(\overline{u}_1, \overline{u}_1)$ y $f(x^2, \overline{u}_2) = \beta f(\overline{u}_2, \overline{u}_2)$, de donde se deduce que $\alpha = \frac{1}{4}$ y $\beta = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$P_U(x^2) = \left(0, -\frac{1}{2}, 1\right)' = -\frac{1}{2}x + x^2.$$