III PREMIOS JORGE JUAN
MÉTODOS NUMÉRICOS

PROBLEMA 0.1 Sea E el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, dotado del producto interior habitual

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Sea D el subespacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2.

Dada la funcion $f(x) = e^x$, queremos determinar el elemento de D que más se aproxima a $f(x)$. Se trata del polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ que minimice la expresión $\|f - p\|^2$.

a) Interpretar grá camente el signi cado de minimizar la expresión $\|f - p\|^2$.

b) Plantear y resolver exactamente el sistema de ecuaciones normales a que da lugar el problema de optimización.

c) Resolver de nuevo el sistema anterior, utilizando el corte a tres dígitos en los elementos de la matriz del sistema.

d) Dar una explicación razonada de las diferencias observadas entre ambos resultados.

Nota: Si se calcula alguna norma de matriz, hágase utilizando la norma matricial deducida de $\|.\|_\infty$.

III PREMIOS JORGE JUAN
MÉTODOS NUMÉRICOS

PROBLEMA 0.2 Dado el polinomio

$$p(x) = 224x^5 - 564x^4 + 629x^3 - 121x^2 - 120x + 18,$$

se pide:

a) Hallar un círculo en cuyo interior estén todas las raíces del polinomio.

b) Comprobar que una de dichas raíces es $1 + i$.

c) Separar todas las raíces reales de $p(x)$.

d) Aplicar el método de Newton, hasta la segunda iteración, para aproximar la menor de todas las raíces reales de $p(x)$.