

II PREMIO JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

Facultad de Ciencias
Universidad de Alicante

PROBLEMA DE COMBINATORIA

De una caja con 100 bolas numeradas del 1 al 100 se extrae una muestra, con reemplazamiento, de tamaño 15. Estamos interesados en saber:

- ¿Cuántas muestras diferentes podemos observar?
- ¿En cuántas de ellas está la bola con el número 2?
- ¿En cuántas de ellas no están las bolas con los números 2 y 5?
- ¿En cuántas de ellas no están las bolas con los números 1, 2 y 5?
- ¿En cuántas de ellas se observan las bolas con los números 1, 2, 5, 7, 20?

Nota: Los cuatro primeros apartados del problema deben servir de ayuda para abordar el quinto.

Solución:

- 100^{15}
- $100^{15} - 99^{15}$
- 98^{15}
- 97^{15}

e) Para resolver este apartado, consideremos los conjuntos representados implícitamente por las expresiones siguientes:

$A_1 =$ "Muestras en las que no se observa el 1"

$A_2 =$ "Muestras en las que no se observa el 2"

....

$A_5 =$ "Muestras en las que no se observa el 20"

Es evidente que podemos conocer el número de muestras en las que no se observa alguno de los cinco números mediante la fórmula que nos da el cardinal de una unión:

Número de muestras en las que no se observa alguno de los cinco números
=

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \dots \cup A_5| = \\ & \sum_{i \leq 5} |A_i| - \sum_{i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & - \sum_{i < j < k < r \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \end{aligned}$$

Evaluemos cada uno de los sumandos de la expresión anterior.

$$\sum_{i \leq 5} |A_i| = \binom{5}{1} 99^{15};$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| &= \binom{5}{2} 98^{15} \\
\sum_{i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| &= \binom{5}{3} 97^{15}; \\
\sum_{i < j < k < r \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_r| &= \binom{5}{4} 96^{15} \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| &= \binom{5}{5} 95^{15} \\
|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_5| &= \\
&= \binom{5}{1} 99^{15} - \binom{5}{2} 98^{15} + \binom{5}{3} 97^{15} - \binom{5}{4} 96^{15} + \binom{5}{5} 95^{15}
\end{aligned}$$

La respuesta es, por lo tanto:

$$\binom{5}{0} 100^{15} - \left[\binom{5}{1} 99^{15} - \binom{5}{2} 98^{15} + \binom{5}{3} 97^{15} - \binom{5}{4} 96^{15} + \binom{5}{5} 95^{15} \right] =$$

$$\sum_{i=0}^5 (-1)^i \binom{5}{i} (100-i)^{15}$$