XX Premios Jorge Juan de Matemáticas

Matemática Discreta

29 de enero de 2019

Dados n números reales positivos, $x_1, x_2, ..., x_n$, se definen las medias aritmética y geométrica, respectivamente, como:

$$\mathrm{MA} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$\mathrm{MG} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$

Se verifica que

$$\mathrm{MA} \geq \mathrm{MG},$$

cumpliéndose con igualdad solamente en el caso en que $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Son muchas las demostraciones distintas que se han hecho de esta desigualdad. Intentemos reproducir dos de ellas.

1. Augustin Louis Cauchy (1789-1857) utilizó una variante del método de inducción sobre n, que consiste en verificar los tres siguientes pasos:

   1. Se demuestra para $n = 2$.
   2. Suponiendo que es cierta para n, se demuestra para $2n$.
   3. Suponiendo que es cierta para n, se demuestra para $n - 1$.

   Prueba la desigualdad verificando los tres pasos del procedimiento señalado.

2. Una prueba alternativa consiste en aplicar el siguiente resultado: dados $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$, si $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, entonces $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$. Demuestra dicho resultado y utilízalo para probar la desigualdad que nos ocupa.