

XIX PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

Sea V el espacio vectorial real de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , con las operaciones ordinarias de suma y producto por un escalar. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ la aplicación que hace corresponder a cada elemento (a, b, c) de \mathbb{R}^3 la función $F(a, b, c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(a, b, c)(x) = a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{cos}^2 x + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea $G : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación que a cada función $f \in V$ le hace corresponder $G(f) = (f(0), f(-\pi/2))$.

Se pide:

1. Probar que F y G son aplicaciones lineales.
2. Hallar una base del núcleo y otra de la imagen de la aplicación F .
3. Demuestra, de forma razonada, que la imagen de G es todo el espacio \mathbb{R}^2 .
4. Calcular la expresión general de $G \circ F$ y clasificar dicha aplicación.