XVIII EDICION PREMIOS JORGE JUAN

CURSO 16/17

PROBABILIDAD

Aunque lo importante es participar, a nadie se le escapa que ganar también tiene su encanto… este año también. En este sentido, el objetivo de cualquier competidor en una carrera sería llegar el primero, pero quedar tercero, ¿sería un buen resultado? Sin duda afirmaríamos que sí en, por ejemplo, la maratón de Nueva York donde participan en torno a 35.000 corredores, pero el éxito sería más discutible si estuviésemos participando en un torneo triangular, aquí tendría mucho más mérito quedar cuarto. Puesto que los extremos “se tocan”, y no es ese nuestro objetivo en este momento, tomaremos un número de participantes intermedio, digamos los aproximadamente 500 corredores que completaron la última media maratón de Alicante. Si los tiempos que los corredores invierten en completar la media maratón siguen distribuciones uniformes en el intervalo [70,150] en minutos e independientes entres si, ¿cuál es el tiempo esperado del que marcará el ganador? ¿Cuántos corredores debería haber para que el tiempo esperado del ganador fuese de hora y media?

RESOLUCIÓN:

Sean $X_i \sim$ Un (70,150) $\forall$i=1,2,…,500 los tiempos en finalizar de los 500 participantes:

$$f(x_i) = \frac{1}{80} \;\; ; \;\; F(x_i) = \frac{x-70}{80}$$

La distribución de probabilidad del tiempo del ganador, obteniéndola a partir de su funci´´on de distribución o directamente aplicando la teoría de estadísticos de orden, vendrá dada por

$$f_{(1)}(x) = n\big(1-F(x)\big)^{n-1} f(x) = 500\left(1-\frac{x-70}{80}\right)^{499}\frac{1}{80} = \frac{500}{80}\left(\frac{150-x}{80}\right)^{499}$$

por lo que, integrando la función anterior multiplicada por la variable, obtendremos el tiempo esperado del ganador, tras aplicar el cambio de variable y = 150 – x

$$E\big(X_{(1)}\big) = \int_{70}^{150} x\,\frac{500}{80}\left(\frac{150-x}{80}\right)^{499}\partial x = \frac{500}{80^{500}}\int_{70}^{150} x(150-x)^{499}\partial x =$$

$$= \frac{500}{80^{500}}\int_{80}^{0}(150-y)y^{499}(-\partial y) = \frac{500}{80^{500}}\int_{0}^{80}(150y^{499}-y^{500})\partial y =$$

$$= \frac{500}{80^{500}}\left(\frac{150y^{500}}{500}-\frac{y^{501}}{501}\right)_0^{80} = \frac{500\times150\times80^{500}}{80^{500}\times500} - \frac{500\times80^{501}}{80^{500}\times501} = 150 - \frac{500}{501}\times 80 = \boldsymbol{70.16\ min.}$$

Si el apartado anterior lo resolvemos con n corredores en lugar de 500, tendremos que

$$E\left(X_{(1)}\right) = \int_{70}^{150} x \frac{n}{80}\left(\frac{150-x}{80}\right)^{n-1} \partial x = \frac{n}{80^n}\int_{70}^{150} x(150-x)^{n-1}\partial x =$$

$$= \frac{n}{80^n}\int_{80}^{0}(150-y)y^{n-1}(-\partial y) = \frac{n}{80^n}\int_{0}^{80}(150y^{n-1} - y^n)\partial y =$$

$$= \frac{n}{80^n} = \left(\frac{150y^n}{n} - \frac{y^{n+1}}{n+1}\right)_0^{80} = 150 - \frac{80n}{n+1}$$

y para que dicha esperanza sea igual a una hora y media,

$$150 - \frac{80n}{n+1} = 90 \quad \rightarrow \quad 60(n+1) = 80n \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n = 3}$$

es decir, el triangular del que hablábamos en el enunciado.