XVIII PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO. Primer ciclo.

Alicante, 4 de noviembre de 2016.

Ejercicio 1

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de soluciones positivas y consecutivas de la ecuación $\tan x = x$. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}.$$

Como $x_n \in (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2})$. Se tiene que $\frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{n^2\pi^2}$.

Ejercicio 2

Sea $f : [0, +\infty)$ una función de continua, positiva y monótona. Demostrar que

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx < +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+1} f(x) = 0.$$

Supongamos que f es creciente y sea $F(x) = \int_0^x t^\alpha f(t)dt$, para $x \geq 0$. Como existe el límite de $F(x)$ en $+\infty$ se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x+1) - F(x) = 0, \tag{1}$$

Por lo que como se termina gracias a que

$$0 \leq x^{\alpha+1} f(x) \leq \int_x^{x+1} t^\alpha f(t)dt = F(x+1) - F(x). \tag{2}$$