XVII EDICION PREMIOS JORGE JUAN

CURSO 15/16

PROBABILIDAD

Como muy acertadamente afirmaba el Barón de Coubertain “*lo importante no es ganar sino participar…”*. Vale, pero ganar también tiene su encanto, especialmente si el ganador se lleva un suculento premio en metálico. Nuestro presupuesto no es suficiente como para llamar suculento al premio, pero a nadie le amarga un dulce, por lo que podemos suponer que estamos interesados en conocer nuestras probabilidades de victoria.

En los premios Jorge Juan, como concurso que es, el objetivo no consiste en sacar una puntuación muy alta, sino la más alta, aunque generalmente no suele serlo tanto. Sigamos suponiendo que todos estáis igualmente preparados y que la puntuación total que obtendréis en este concurso sigue una distribución exponencial truncada con media 5 y rango, obviamente, el intervalo [0,10].

Teniendo en cuenta que os habéis presentado 20 participantes, ¿cuál es la probabilidad de que el ganador lo haga con una nota superior a 8 puntos? ¿Cuántos alumnos deberían haberse presentado para que la probabilidad anterior fuese superior a 0.9?

RESOLUCIÓN:

En primer lugar, y puesto que el rango de la variable es el intervalo [0 , 10] y no R^+ como es habitual en una distribución exponencial, habrá que corregir su función de densidad para adaptarla a su nuevo intervalo de definición, y a partir de ella obtener la función de distribución

$$1 = \int_0^{10} \frac{k}{5} e^{-\frac{x}{5}} \partial x = -ke^{-\frac{x}{5}}\Big|_0^{10} = k(1-e^{-2}) \;\rightarrow\; k = \frac{1}{1-e^{-2}}$$

$$\rightarrow\; f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{5}}}{5(1-e^{-2})} \quad y \quad F(x) = \int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{5}}}{5(1-e^{-2})} \partial t = \frac{1-e^{-\frac{x}{5}}}{1-e^{-2}}$$

Recurriendo a la teoría de estadísticos de orden, la función de distribución del ganador, es decir, de la máxima puntuación, es la función de distribución de la variable elevada al tamaño muestral

$$F_{X_{(n)}}(x) = \big(F(x)\big)^n = \left(\frac{1-e^{-\frac{x}{5}}}{1-e^{-2}}\right)^n$$

y, por tanto, la probabilidad de que la puntuación del ganador sea superior a un 8 será

$$P\big(X_{(n)} > 8\big) = 1 - P\big(X_{(n)} \leq 8\big) = 1 - F_{X_{(20)}}(8) = 1 - \left(\frac{1 - e^{-\frac{8}{5}}}{1 - e^{-2}}\right)^{20} = \mathbf{0.7985}$$

Para que la probabilidad anterior sea superior a 0.9 tendremos que

$$1 - \left(\frac{1 - e^{-\frac{8}{5}}}{1 - e^{-2}}\right)^{n} > 0.9 \;\rightarrow\; \left(\frac{1 - e^{-\frac{8}{5}}}{1 - e^{-2}}\right)^{n} < 0.1 \;\rightarrow\; 0.923^{n} < 0.1 \;\rightarrow\; n \ln 0.923 < \ln 0.1$$

$$\rightarrow\; n > \frac{\ln 0.1}{\ln 0.923} = \frac{-2.3026}{-0.0801} = 28.7 \;\rightarrow\; \boldsymbol{n \geq 29}$$