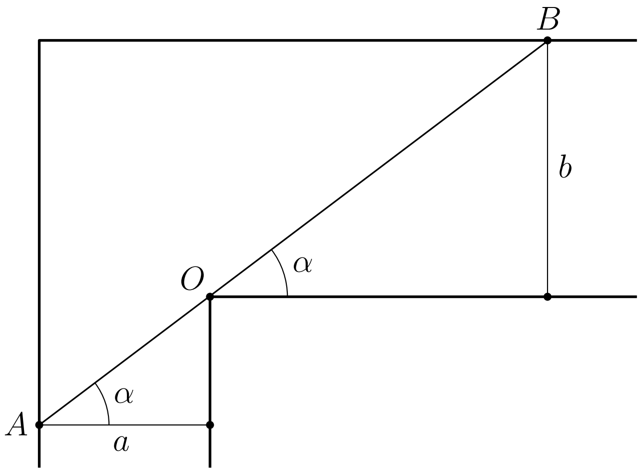
PREMIO JORGE JUAN 2015

PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Un pasillo que tiene forma de letra Γ tiene anchura a en una de sus alas y anchura b en la otra. Encontrar la longitud del palo más largo que se puede pasar de un lado a otro. (Se supone que el problema se desarrolla en el mundo bidimensional de "Planilandia", donde por tanto el palo se mantiene horizontal durante el moviento y el grosor del palo es despreciable.)

Solución:

Considerar un ángulo arbitrario α entre $0°$ y $90°$, y sea AB el segmento en la esquina del pasillo que es tangente con el vértice O del ángulo recto interno del pasillo y que tiene un ángulo α con uno de sus muros.



Entonces

$$f(\alpha) = AB = AO + OB = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha}.$$

Un palo de longitud ℓ puede ser movido de un ala del pasillo a la otra si $\ell \leq f(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, 90°)$.

Ésta es una condición necesaria y suficiente, por lo que la longitud máxima ℓ del palo será el mínimo de la función $f(\alpha)$ sobre el intervalo $(0, 90°)$, si existe.

Tenemos que

$$f'(\alpha) = \frac{a\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{b\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\left(\tan^3\alpha - \frac{b}{a}\right).$$

Como $\tan^3\alpha$ crece estrictamente de 0 a $+\infty$ cuando α se mueve de $0°$ a $90°$, existe un único $\alpha_0 \in (0, 90°)$ tal que $\tan^3\alpha_0 = \frac{b}{a}$. Entonces $f'(\alpha_0) = 0$ y, además, $f'(\alpha) < 0$ para $\alpha \in (0, \alpha_0)$ y $f'(\alpha) > 0$ para $\alpha \in (\alpha_0, 90°)$. Por tanto, $f(\alpha)$ tiene un mínimo en α_0. De la igualdad $\tan\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ se sigue que

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{1+\tan^2\alpha_0} = \frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a^{2/3}}{a^{2/3}+b^{2/3}},$$

$$\sin^2\alpha_0 = 1 - \cos^2\alpha_0 = \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}+b^{2/3}}.$$

Así,

$$f(\alpha_0) = \frac{a}{\cos\alpha_0} + \frac{b}{\sin\alpha_0} = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}.$$

Por consiguiente, la longitud máxima del palo que puede moverse de un ala del pasillo a la otra es $\ell = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$.

Si el problema se desarrollase en un mundo tridimensional donde el pasillo tuviese una altura h, la longitud máxima del palo se alcanzaría al realizar el movimiento llevando un extremo del palo por la parte inferior del pasillo y el otro por la superior. Aplicando el teorema de Pitágoras, la longitud máxima del palo sería

$$\ell = \sqrt{\left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^3 + h^2}.$$