XVII PREMIOS JORGE JUAN DE MATEMÁTICAS

ANÁLISIS MATEMÁTICO. Primer ciclo.

Alicante, 6 de noviembre de 2015.

Ejercicio 1
Supongamos que los términos de una sucesión numérica $(a_n)_n$ *verifican la condición*

$$0 \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\,.$$

Demostrar que existe $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$.

De la condición de la sucesión se deduce que $a_n \leq na_1$, por lo que la sucesión es acotada y por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene límite superior que llamamos L. Por lo que sabemos que $L = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{m_k}}{m_k}$. Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos

$$m_k = nl_k + r_k \qquad \text{con } r_k \in \{0, 1, \ldots n-1\}\,,$$

y así

$$a_{m_k} \leq l_k a_n + a_{r_k},$$

$$\frac{a_{m_k}}{m_k} \leq \frac{l_k}{nl_k + r_k} a_n + \frac{a_{r_k}}{m_k}.$$

Pasando al límite en k se termina el ejercicio ya que quedaría

$$L \leq \frac{a_n}{n}.$$

Ejercicio 2
Sea $f : (0, +\infty)$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *verificando que*

1. $f(2015) = 2015$.
2. $(x^2 + f(x)^2)f'(x) = 1$, *para todo* $x \in (0, +\infty)$.

Demostrar que existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *y es estrictamente menor que* $2015 + \frac{1}{2015}\frac{\pi}{4}$.

De la segunda propiedad deducimos que f es estrictamente creciente.
Sea ahora $x > 2015$ escribimos

$$f(x) = f(2015)+\int_{2015}^{x} f'(t)dt = 2015+\int_{2015}^{x} \frac{dt}{t^2+f(t)^2} < 2015+\int_{2015}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+(2015)^2}.$$

Todos los ejercicios puntuarán por igual.