XVII PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, se llama homotecia de razón $\beta \in \mathbb{K}$, al endomorfismo $f : V \to V$ definido por $f\left(\overrightarrow{v}\right) = \beta \overrightarrow{v}$, para todo $\overrightarrow{v} \in V$. Se pide:

1. Determinar el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica las siguientes condiciones:

- La restricción de f al subespacio

$$L = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$$

  es una homotecia de razón 3.

- El subespacio

$$L' = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 4y + 3z = 0,\ x + 2y + z = 0\right\}$$

  es invariante para f, es decir, se cumple que $f\left(L'\right) \subseteq L'$.

- La imagen del vector $(0, 0, -1)$ pertenece al subespacio $L'' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.

2. Clasificar la aplicación f.

Solución:

1. Empezamos buscando una base de los subespacios L y L'.

$$L = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\} = \{(-y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Env}\left(\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\right).$$

Los vectores $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$ son linealmente independientes, por lo que forman una base del subespacio L.

Para encontrar una base de L', resolvemos el sistema homogéneo compatible indeterminado

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right\}.$$

Las soluciones de este sistema deben cumplir las condiciones $z = 0$ y $x = -2y$, por lo que

$$L' = \{(-2y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Env}\left(\{(-2, 1, 0)\}\right).$$

Los vectores $\overrightarrow{u_1} := (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{u_2} := (-1, 0, 1)$ y $\overrightarrow{u_3} := (-2, 1, 0)$ son linealmente independientes, ya que

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Por lo tanto, $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Calculamos ahora la matriz asociada a f respecto de la base B. Para ello debemos obtener las imágenes por f de los vectores de B.

Dado que $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \in L$ y, por hipótesis, la restricción de f a L es una homotecia de razón 3, se tiene que

$$f(\overrightarrow{u_1}) = 3\overrightarrow{u_1},$$

$$f(\overrightarrow{u_2}) = 3\overrightarrow{u_2}.$$

Por otra parte, sabemos que L' es invariante para f, es decir, $f(L') \subseteq L'$. Dado que $L' = \mathrm{Env}(\{\overrightarrow{u_3}\})$, debe cumplirse que

$$f(L') = \mathrm{Env}(\{f(\overrightarrow{u_3})\}) \subset \mathrm{Env}(\{\overrightarrow{u_3}\})$$

o, lo que es lo mismo,

$$f(\overrightarrow{u_3}) = \alpha\overrightarrow{u_3}.$$

Entonces, la matriz asociada a f respecto de la base B es

$$A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Para obtener la matriz asociada a f respecto de la base canónica, debemos hacer un cambio de base tanto en el espacio inicial como en el final. Así, si denotamos por P_B^C, la matriz cambio de base de B a la canónica, se tiene

$$M_C^C(f) = P_B^C \cdot M_B^B(f) \cdot \left(P_B^C\right)^{-1}.$$

Dado que

$$P_B^C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\left(P_B^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_C^C(f) = \begin{pmatrix} -3+2\alpha & -6+2\alpha & -6+2\alpha \\ 3-\alpha & 6-\alpha & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por último, sabemos que

$$f(0,0,-1) \in L'' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\right\}.$$

Puesto que

$$\left(\begin{array}{ccc} -3+2\alpha & -6+2\alpha & -6+2\alpha \\ 3-\alpha & 6-\alpha & 3-\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -1 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 6-2\alpha \\ -3+\alpha \\ -3 \end{array}\right),$$

debe cumplirse que

$$(6-2\alpha,-3+\alpha,-3)\in L'',$$

es decir,

$$6-2\alpha-(-3+\alpha)-3=0$$

$$-3\alpha+6=0$$

$$\alpha=2.$$

Por lo tanto,

$$M_C^C(f)=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

y la aplicación es

$$f(x,y,z)=(x-2y-2z,x+4y+z,3z).$$

2. Puesto que el rango de la matriz $M_C^C(f)$ es 3, la dimensión del subespacio $\operatorname{Im} f$ es 3 y, por lo tanto, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^3$. Así pues, f es suprayectiva y, dado que se trata de un endomorfismo, es también biyectiva.