

XVI PREMIOS JORGE JUAN
Universidad de Alicante, 7 de noviembre d 2014

PRIMER NIVEL
CÁLCULO

1. Hallar todos los valores reales x , tales que

$$2^{\operatorname{sen}^4 x - \cos^2 x} - 2^{\cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x} = \cos 2x.$$

(Tres puntos)

2. Calcular $\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x}) dx$. $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

(Tres puntos)

3. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x))^2 = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow b^-} (f(x))^2 = e - 1.$$

Probar que si $2f(x)f'(x) - (f(x))^2 \geq 1$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $0 < b - a \leq 1$. Se pide un ejemplo de función $f(x)$, en el que $b - a = 1$.

(Cuatro puntos)