XVI PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

1. Se consideran V un espacio vectorial real y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Sean

$$\operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{x} \in V \mid f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0, \forall \overrightarrow{y} \in V\}$$

y

$$\operatorname{Is} f = \{\overrightarrow{x} \in V \mid f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0\},$$

el núcleo de f y el conjunto de los vectores isótropos respecto de f, respectivamente. Se pide:

a) Probar que $\operatorname{Ker} f$ es un subespacio vectorial de V.

b) Probar que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Is} f$.

c) Probar que la inclusión del apartado anterior puede ser estricta.

d) Probar que si $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$ son tales que $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Is} f$ y $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq 0$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in \operatorname{Is} f$.

e) Probar que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Is} f$ si, y sólo si, $\operatorname{Is} f$ es un subespacio vectorial de V.

2. Dados el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes reales y la forma bilineal simétrica $f : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(A, B) = c \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo y $\operatorname{tr}(A)$ denota la traza de la matriz A, se pide:

a) Siendo E_{ij}, $i, j = 1, 2$, las matrices de la base canónica de V, caracterizar, en función de los valores de c, las matrices A tales que $f(A, E_{ij}) = 0$ para todo $i, j = 1, 2$.

b) Calcular, en función de los valores de c, el núcleo de f y una base del mismo.

Solución:

1. **a)** $\operatorname{Ker} f = \{\overrightarrow{x} \in V \mid f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0, \forall \overrightarrow{y} \in V\} \subset V$ y sabemos que $\overrightarrow{0} \in \operatorname{Ker} f$, ya que $f\left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{y}\right) = 0$, para todo $\overrightarrow{y} \in V$. Así pues, $\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$.

   Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}' \in \operatorname{Ker} f$. Debemos probar que $\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x}' \in \operatorname{Ker} f$.

   En efecto, dado que $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}' \in \operatorname{Ker} f$, se tiene que $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$ y $f(\overrightarrow{x}', \overrightarrow{y}) = 0$, para todo $\overrightarrow{y} \in V$. Entonces,

   $$f(\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x}', \overrightarrow{y}) = \alpha f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + \beta f(\overrightarrow{x}', \overrightarrow{y}) = \alpha 0 + \beta 0 = 0,$$

   para todo $\overrightarrow{y} \in V$, y $\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x}' \in \operatorname{Ker} f$. Por lo tanto, $\operatorname{Ker} f$ es un subespacio vectorial de V.

   b) Sea $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Ker} f$. Entonces, $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$ para todo $\overrightarrow{y} \in V$. En particular, para $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}$ se cumple que $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$. Por lo tanto, $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Is} f$.

   c) Ponemos un contraejemplo. Consideramos el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^2$ y la forma bilineal simétrica $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2) \in V$, como

   $$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_2.$$

   En este caso, para $\overrightarrow{x} = (1, 1)$ se tiene que $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = x_1^2 - x_2^2 = 1 - 1 = 0$ y, por lo tanto, $\overrightarrow{x} = (1, 1) \in \operatorname{Is} f$. Pero si tomamos $\overrightarrow{x} = (1, 1)$ e $\overrightarrow{y} = (1, 2)$, se tiene que

   $$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1 \neq 0,$$

   por lo que $\overrightarrow{x} = (1, 1) \notin \operatorname{Ker} f$.

   d) Sea $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Is} f$ e $\overrightarrow{y} \in V$ tal que $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq 0$. Para que $\alpha\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in \operatorname{Is} f$, se debe cumplir que

   $$f(\alpha\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \alpha\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = 0$$

   o, lo que es lo mismo, aplicando que f es bilineal simétrica,

   $$\alpha^2 f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) + 2\alpha f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + f(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) = 0. \tag{1}$$

   Dado que $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Is} f$, se tiene que $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$, de modo que (1) es equivalente a

   $$2\alpha f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + f(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) = 0 \tag{2}$$

   y, como $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq 0$, podemos despejar α en (2) y se obtiene

   $$\alpha = \frac{-f(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y})}{2f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})} \in \mathbb{R}.$$

e) Si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Is} f$, como $\operatorname{Ker} f$ es un subespacio vectorial, entonces $\operatorname{Is} f$ también lo es.

Para probar el recíproco, supongamos que $\operatorname{Is} f$ es un subespacio vectorial y que existe $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Is} f$ tal que $\overrightarrow{x} \notin \operatorname{Ker} f$.

Entonces, existe $\overrightarrow{y} \in V$ tal que $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq 0$. Por el apartado anterior, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{z} := \alpha \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in \operatorname{Is} f$. Como, por hipótesis, $\operatorname{Is} f$ es un subespacio vectorial de V y $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \in \operatorname{Is} f$, se tiene que $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z} \in \operatorname{Is} f$ y, por lo tanto,

$$f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}) = 0.$$

Al ser f una forma bilineal simétrica, se tiene que

$$f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}) = f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) + 2f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) + f(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z}) = 2f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}),$$

de manera que $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) = 0$. Pero

$$f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) = f(\overrightarrow{x}, \alpha\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \alpha f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}),$$

con lo que se obtiene que $f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$, que es una contradicción. Por lo tanto, se cumple que

$$\operatorname{Is} f \subset \operatorname{Ker} f,$$

que junto con la inclusión demostrada en el apartado b, nos da la igualdad que queríamos demostrar.

2. **a)** Las matrices de la base canónica de V son

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se tiene que

$$AE_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix},$$

$$AE_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$AE_{22} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

por lo que

$$f(A, E_{11}) = ca_{11} - (a_{11} + a_{22}) \cdot 1 = (c-1)\, a_{11} - a_{22},$$

$$f(A, E_{12}) = ca_{21} - (a_{11} + a_{22}) \cdot 0 = ca_{21},$$

$$f(A, E_{21}) = ca_{12} - (a_{11} + a_{22}) \cdot 0 = ca_{12},$$

$$f\left(A, E_{22}\right)=c a_{22}-\left(a_{11}+a_{22}\right) \cdot 1=(c-1)\, a_{22}-a_{11}.$$

Entonces, para que $A \in V$ verifique que $f\left(A, E_{ij}\right)=0$ para todo $i, j=1,2$, debe cumplirse

$$\left.\begin{array}{rcrcl}
(c-1)\, a_{11} & - & a_{22} & = & 0 \\
 & & c a_{21} & = & 0 \\
 & & c a_{12} & = & 0 \\
-a_{11} & + & (c-1)\, a_{22} & = & 0
\end{array}\right\}$$

y, de las ecuaciones primera y cuarta, se obtiene que $\left(c^{2}-2 c\right) a_{22}=0$, de donde $a_{22}=0$ para $c \neq 0$ y $c \neq 2$.

Por lo tanto, se tienen los siguientes casos:

i) Si $c \neq 0$ y $c \neq 2$, se tiene que $a_{11}=a_{22}=a_{12}=a_{21}=0$ y, por lo tanto,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Si $c=0$, se tiene que $a_{22}=-a_{11}$, por lo que

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix},$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R}$.

iii) Si $c=2$, se tiene que $a_{11}=a_{22}$ y $a_{12}=a_{21}=0$, por lo que

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix},$$

con $a_{11} \in \mathbb{R}$.

b) Buscamos las matrices $A \in V$ para las cuales $f(A, B)=0$, para todo $B \in V$. En particular, dicha condición debe cumplirse para $B=E_{ij}$, $i, j=1,2$. Así pues, tenemos tres casos:

i) Si $c \neq 0$ y $c \neq 2$, la única matriz que cumple $f\left(A, E_{ij}\right)=0$, para todo $i, j=1,2$, es

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y dicha matriz también verifica que $f(A, B)=0$, para todo $B \in V$. Por lo tanto,

$$\operatorname{Ker} f=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

ii) Si $c=0$, las matrices que cumplen que $f\left(A, E_{ij}\right)=0$, para todo $i, j=1,2$, son de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix},$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R}$. Para este tipo de matrices, se tiene que

$$f(A,B) = 0 \cdot \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) = 0 - (a_{11} - a_{11}) \cdot \operatorname{tr}(B) = 0,$$

para todo $B \in V$. Por lo tanto,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}, a_{11}, a_{12}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

y una base de $\operatorname{Ker} f$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

iii) Por último, si $c = 2$, las matrices que cumplen que $f(A, E_{ij}) = 0$, para todo $i, j = 1, 2$, son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_{11} I,$$

con $a_{11} \in \mathbb{R}$. Para este tipo de matrices, se tiene que

$$\begin{aligned} f(A,B) &= 2 \cdot \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B) = 2\operatorname{tr}((a_{11}I)B) - 2a_{11}\operatorname{tr}(B) \\ &= 2a_{11}\operatorname{tr}(IB) - 2a_{11}\operatorname{tr}(B) = 0, \end{aligned}$$

para todo $B \in V$. Por lo tanto,

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}, a_{11} \in \mathbb{R} \right\}$$

y una base de $\operatorname{Ker} f$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.