PREMIO JORGE JUAN 2014

PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Nos acabamos de comprar un piso de protección oficial a cuyas piezas se accede a través de un pasillo el forma de "L" de un metro de anchura. La puerta del piso mide 120 cm. de anchura mientras que las que comunican las piezas con el pasillo miden 1 m. Está claro que podemos arrastrar hasta el comedor, situado al final del pasillo, algunos muebles, como mesas circulares de hasta 1 m. de diámetro, así como mesas cuadradas de hasta 1 m. de lado, pero no mesas mayores que tengan dichas formas.

La regla del juego es que solo se admiten movimientos de arrastre: ni se pueden subir los muebles desde la calle hasta el balcón del comedor, ni introducirlos desmontados (aunque se hayan comprado en Ikea), ni erguirlos para pasar el recodo del pasillo.

La pregunta que nos hacemos es la siguiente: ¿cuál es el área máxima de los muebles que podemos arrastrar desde la puerta del piso hasta el comedor?

Nota. Debe dar la respuesta con precisión de dm. cuadrados. Se valorará el rigor de la argumentación.

Solución:

Se trata de maximizar el área de los conjuntos planos compactos susceptibles de doblar la esquina al ser arrastrados. Como no sabemos modelar este problema, queda el recurso de comparar las áreas máximas para muebles de formas predeterminadas, es decir, maximizar el área sobre subconjuntos del conjunto factible.

Mesas circulares: $\frac{\pi}{4} = 0.78\ m^2 = 78\ dm^2$.

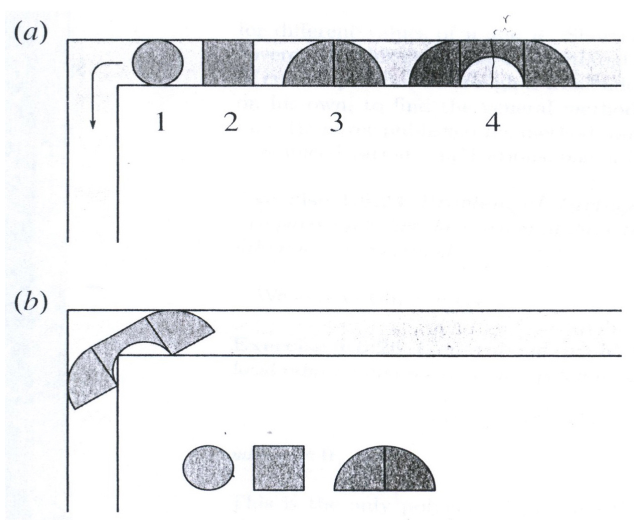
Mesas cuadradas: $1\ m^2 = 100\ dm^2$.

Mesas semicirculares: $\frac{\pi}{2} = 1.57\ m^2 = 157\ dm^2$.

Sofás de la forma (4) en la figura de abajo, que son la unión de dos cuartos de círculo con un conjunto situado entre ambos, que se obtiene al eliminar de un rectángulo de base $0 < 2x \leq 2$ y de 1 m. de altura un semicírculo de radio x. El área de dicho sofá es $\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi x^2}{2}$. Hay que resolver

$$\begin{array}{lll} P_1: & \text{Max} & f(x) = \frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi x^2}{2} \\ & \text{s.a} & 0 < 2x \leq 2. \end{array}$$

Como f es cóncava y cuadrática, el máximo de f en $\mathbb{R}$ se alcanza en su único punto singular $\overline{x} = \frac{2}{\pi}$, que es factible para P_1 y, por lo tanto, la solución óptima buscada, con $f(\overline{x}) = 221\ dm^2$.



Sofás de forma similar a (4), pero sustituyendo los dos cuartos de círculo por sectores circulares de ángulo $0 < y \leq \frac{\pi}{4}$ y el rectángulo intermedio por un trapecio cuya base mayor no excede de$\sqrt{2}$ (la diagonal del cuadrado unidad de la esquina). Como el área de cada sector es $\frac{y}{2}$, la altura del trapecio es

$\sin y$, la base mayor mide $2(x+\cos y)$ y la menor $2x$, el área del sofá es $y + (2x+\cos y)\sin y - \frac{\pi x^2}{2}$ y el problema a resolver el siguiente:

$$\begin{array}{lll} P_2: & \text{Max} & f(x,y) = y + (2x+\cos y)\sin y - \frac{\pi x^2}{2} \\ & \text{s.a} & 0 < 2x \leq 2, \\ & & 0 < y \leq \frac{\pi}{4}, \end{array}$$

donde hay que sustituir las restricciones de desigualdad estricta por débiles para poder asegurarse la existencia de máximo (teorema de Weierstrass). Como

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin y - \pi x \\ -\sin^2 y + (\cos y)(2x+\cos y) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

carece de soluciones, la solución está en la frontera, concretamente en $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$, con $f(\overline{x}, \overline{y}) = 221\ dm^2$. En otras palabras, esta generalización de los sofás no nos proporcionó una ganancia.

¿Pueden llevarse hasta el comedor muebles mayores que el sofá de (4)? Quien ha propuesto el problema cree que no, pero resulta difícil probarlo al carecer de un modelo formal. Se trata de uno de tantos problemas de enunciado sencillo, pero que permanecen abiertos.