Premios Jorge Juan de la Universidad de Alicante
2013
Métodos Numéricos

Problema

La función generatriz

$$\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = T_0(x) + T_1(x)t + T_2(x)t^2 + \cdots, \quad |x| < 1, \quad |t| \leq 1,$$

nos da otra definición de los polinomios de Tchebyshev, $T_0, T_1, \cdots$.

1. Encuentre, utilizando esta definición, los polinomios T_0, T_1, T_2, T_3.

2. Pruebe, a partir de la definición dada, que se verifica la relación

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

3. Utilizando la recurrencia del apartado anterior, demuestre que

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x).$$

4. De nuevo mediante la recurrencia del apartado 2, demuestre que

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Solución.

1.- Si escribimos la función generatriz en la forma

$$(1-2xt+t^2)(T_0(x)+T_1(x)t+T_2(x)t^2+\cdots)=1-xt$$

y efectuamos el producto indicado, obtenemos

$$\begin{array}{l} T_0(x)=1 \\ T_1(x)-2xT_0(x)=-x \\ T_2(x)-2xT_1(x)+T_0(x)=0 \\ \cdots \\ T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0 \\ \cdots \end{array}$$

Así, pues,

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 \\ T_1 &= x \\ T_2 &= 2xT_1-T_0=2x^2-1 \\ T_3 &= 2x(x^2-1)-T_1=4x^3-3x \end{aligned}$$

y hemos resuelto los apartados 1 y 2.

3.- Es evidente que T_0 y T_1 verifican la relación. Admitamos que cualquier polinomio, $T_k,\ k\le n$, también la verifica.
Utilizando la relación del segundo apartado, se tiene

$$\begin{aligned} T_{n+1}(-x)=2(-x)T_n(-x)-T_{n-1}(-x)\ \text{(utilizando inducción)} = \\ 2(-x)(-1)^nT_n(x)-(-1)^{n-1}T_{n-1}(x) = \\ \text{(teniendo en cuenta que } (-1)^{n-1}=(-1)^{n+1}) = \\ (-1)^{n+1}(2xT_n(x)-T_{n-1}(x))=(-1)^{n+1}T_{n+1}(x). \end{aligned}$$

4.- Es evidente que la relación es cierta para $n=0$ y $n=1$. Admitamos que $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ y $T_{n-1}(x)=\cos((n-1)\arccos x)$.
Por el apartado 2 y llamando $t=\arccos x$, se tiene

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x)=2\cos t\cos(nt)-\cos((n-1)t) = \\ 2\cos t\cos(nt)-(\cos nt\cos t+\operatorname{sen} nt\operatorname{sen} t)=\cos nt\cos t-\operatorname{sen} nt\operatorname{sen} t = \\ \cos(n+1)t=\cos((n+1)\arccos x) \end{aligned}$$