XV PREMIOS JORGE JUAN

Álgebra Lineal

Se consideran, $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 3 con coeficientes reales y W el subconjunto de V formado por las "*matrices mágicas*":

$$W = \left\{ A = (a_{ij}) \in V \mid \sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = a_{13} + a_{22} + a_{31},\, i, j = 1, 2, 3 \right\}.$$

Se pide:

1. Demuestra que W es un subespacio vectorial de V, dando su dimensión y una base.

2. Si denotamos por W_S y $W_{\mathcal{A}}$ los conjuntos de las matrices mágicas simétricas y antisimétricas, respectivamente, demuestra que ambos conjuntos son subespacios de W.

3. Demuestra que $W = W_S \oplus W_{\mathcal{A}}$, donde $\oplus$ denota la suma directa de los dos subespacios.

SOLUCIÓN

1. Para probar que W es un subespacio vectorial de V, tenemos que demostrar que:

a) $A + B \in W, \ \forall A, B \in W.$

b) $\lambda A \in W, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in W.$

Consideremos $A, B \in W$. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, deben cumplirse las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} a_{ij} &= \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = a_{13} + a_{22} + a_{31},\, i, j = 1, 2, 3, \\ \sum_{i=1}^{3} b_{ij} &= \sum_{j=1}^{3} b_{ij} = b_{13} + b_{22} + b_{31},\, i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Entonces la matriz suma, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, es también un elemento de W, ya que, para $i, j = 1, 2, 3$,

$$\sum_{i=1}^{3} (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} + \sum_{i=1}^{3} b_{ij} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} + \sum_{j=1}^{3} b_{ij} = \sum_{j=1}^{3} (a_{ij} + b_{ij}),$$

y

$$\sum_{j=1}^{3} (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} + \sum_{j=1}^{3} b_{ij} = (a_{13} + a_{22} + a_{31}) + (b_{13} + b_{22} + b_{31}) = (a_{13} + b_{13}) + (a_{22} + b_{22}) + (a_{31} + b_{31}).$$

Consideremos ahora $A = (a_{ij}) \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, se cumple

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = a_{13} + a_{22} + a_{31},\, i, j = 1, 2, 3$$

y, multiplicando la expresión anterior por λ, se tiene

$$\lambda\sum_{i=1}^{3}a_{ij}=\lambda\sum_{j=1}^{3}a_{ij}=\lambda\left(a_{13}+a_{22}+a_{31}\right),\, i,j=1,2,3,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{3}\left(\lambda a_{ij}\right)=\lambda a_{13}+\lambda a_{22}+\lambda a_{31},\, i,j=1,2,3.$$

Por lo tanto, la matriz $\lambda A=\left(\lambda a_{ij}\right)\in W$.

Así pues, W es un subespacio vectorial de V.

Para encontrar una base de W, necesitamos conocer la forma que tiene un vector genérico del subespacio y, para encontrarla, debemos resolver el sistema que se obtiene al considerar las condiciones que definen los elementos de W, es decir,

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} & = & a_{13} & + & a_{22} & + & a_{31}\\
a_{21} & + & a_{22} & + & a_{23} & = & a_{13} & + & a_{22} & + & a_{31}\\
a_{31} & + & a_{32} & + & a_{33} & = & a_{13} & + & a_{22} & + & a_{31}\\
a_{11} & + & a_{21} & + & a_{31} & = & a_{13} & + & a_{22} & + & a_{31}\\
a_{12} & + & a_{22} & + & a_{32} & = & a_{13} & + & a_{22} & + & a_{31}\\
a_{13} & + & a_{23} & + & a_{33} & = & a_{13} & + & a_{22} & + & a_{31}
\end{array}\right\}.$$

Simplificando y poniendo las ecuaciones y las incógnitas en el orden adecuado, se obtiene el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
a_{11} & + & a_{12} & & & & & & & & & & & - & a_{22} & - & a_{31} & = & 0\\
 & & a_{12} & & & & & + & a_{32} & & & - & a_{13} & & & - & a_{31} & = & 0\\
 & & & & a_{21} & + & a_{23} & & & & & - & a_{13} & & & - & a_{31} & = & 0\\
 & & & & & & a_{23} & & & + & a_{33} & & & - & a_{22} & - & a_{31} & = & 0\\
 & & & & & & & & a_{32} & + & a_{33} & - & a_{13} & - & a_{22} & & & = & 0\\
a_{11} & & & + & a_{21} & & & & & & & - & a_{13} & - & a_{22} & & & = & 0
\end{array}\right\},$$

cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss-Jordan,

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow{F_6\longleftarrow F_6-F_1+F_2-F_3+F_4-F_5}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\xrightarrow[F_3\longleftarrow F_3-F_4]{F_2\longleftarrow F_2-F_5}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftarrow F_1 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y se obtiene el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11} + a_{33} - 2a_{22} & = & 0 \\ a_{12} - a_{33} + a_{22} - a_{31} & = & 0 \\ a_{21} - a_{33} - a_{13} + a_{22} & = & 0 \\ a_{23} + a_{33} - a_{22} - a_{31} & = & 0 \\ a_{32} + a_{33} - a_{13} - a_{22} & = & 0 \end{array}\right\},$$

de donde se obtiene

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11} & = & -a_{33} + 2a_{22} \\ a_{12} & = & a_{33} - a_{22} + a_{31} \\ a_{21} & = & a_{33} + a_{13} - a_{22} \\ a_{23} & = & -a_{33} + a_{22} + a_{31} \\ a_{32} & = & -a_{33} + a_{13} + a_{22} \end{array}\right\}.$$

Por lo tanto, $A \in W$ si, y sólo si,

$$A = a_{33} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

así que las matrices del conjunto

$$B = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

son un sistema de generadores para W. Por otra parte, las matrices del conjunto B son linealmente independientes ya que si tomamos una combinación lineal de ellas y la igualamos a la matriz nula,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se obtiene que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Así pues, B es una base de W y $\dim W = 4$.

2. Puesto que $W_S = W \cap S \subset W$ y $W_{\mathcal{A}} = W \cap \mathcal{A} \subset W$, con S y $\mathcal{A}$ los subespacios de las matrices simétricas y antisimétricas de orden 3, respectivamente, y las intersecciones de subespacios vectoriales son subespacios vectoriales, se tiene que W_S y $W_{\mathcal{A}}$ son subespacios de W.

3. Calculamos $\dim W_S$ y $\dim W_{\mathcal{A}}$ encontrando una base para cada uno de los subespacios.

Por una parte, $A \in W_S$ si, y sólo si, $A \in W$ y $A \in S$, es decir,

$$A = a_{33}A_1 + a_{13}A_2 + a_{22}A_3 + a_{31}A_4$$

y $A^T = A$. Como $A^T = a_{33}A_1^T + a_{13}A_2^T + a_{22}A_3^T + a_{31}A_4^T$ y A_1 y A_3 son simétricas, se tiene que

$$A^T = a_{33}A_1 + a_{13}A_2^T + a_{22}A_3 + a_{31}A_4^T,$$

por lo que $A^T = A$ si, y sólo si,

$$a_{33}A_1 + a_{13}A_2^T + a_{22}A_3 + a_{31}A_4^T = a_{33}A_1 + a_{13}A_2 + a_{22}A_3 + a_{31}A_4,$$

o, lo que es lo mismo,

$$a_{13}A_2^T + a_{31}A_4^T - a_{13}A_2 - a_{31}A_4 = a_{13}\left(A_2^T - A_2\right) + a_{31}\left(A_4^T - A_4\right) = O.$$

Resolviendo la anterior ecuación matricial, se obtiene que $a_{13} = a_{31}$ y, por lo tanto, $A \in W_S$ si, y sólo si,

$$A = a_{33}A_1 + a_{13}A_2 + a_{22}A_3 + a_{13}A_4 = a_{33}A_1 + a_{13}\left(A_2 + A_4\right) + a_{22}A_3.$$

Por lo tanto, W_S es el subespacio generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se demuestra fácilmente que el conjunto anterior es una base de W_S, por lo que $\dim W_S = 3$.

Por otro lado, $A \in W_{\mathcal{A}}$ si, y sólo si, $A \in W$ y $A \in \mathcal{A}$, es decir,

$$A = a_{33}A_1 + a_{13}A_2 + a_{22}A_3 + a_{31}A_4$$

y $A^T = -A$. Como $A^T = a_{33}A_1 + a_{13}A_2^T + a_{22}A_3 + a_{31}A_4^T$, se tiene que $A^T = -A$ si, y sólo si,

$$a_{33}A_1 + a_{13}A_2^T + a_{22}A_3 + a_{31}A_4^T = -a_{33}A_1 - a_{13}A_2 - a_{22}A_3 - a_{31}A_4,$$

o, lo que es lo mismo,

$$2a_{33}A_1 + a_{13}\left(A_2^T + A_2\right) + 2a_{22}A_3 + a_{31}\left(A_4^T + A_4\right) = O.$$

Resolviendo la anterior ecuación matricial, se obtiene que $a_{13} = -a_{31}$, $a_{33} = 0$ y $a_{22} = 0$, por lo tanto, $A \in W_{\mathcal{A}}$ si, y sólo si,

$$A = a_{13}A_2 - a_{13}A_4 = a_{13}\left(A_2 - A_4\right).$$

Por lo tanto, $W_{\mathcal{A}}$ es el subespacio generado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y $\dim W_{\mathcal{A}} = 1$.

Por último, dado que $W_S \cap W_{\mathcal{A}} \subset S \cap \mathcal{A} = \{O\}$, se tiene que

$$\dim\left(W_S + W_{\mathcal{A}}\right) = \dim W_S + \dim W_{\mathcal{A}} - \dim\left(W_S \cap W_{\mathcal{A}}\right) = 3 + 1 - 0 = 4.$$

Como $W_S + W_{\mathcal{A}}$ es un subespacio de W con la misma dimensión que W, se tiene que $W = W_S + W_{\mathcal{A}}$, que es suma directa porque $W_S \cap W_{\mathcal{A}} = \{O\}$.