PREMIO JORGE JUAN 2011

PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

El economista alemán Weber planteó en 1909 el problema de optimización consistente en la búsqueda de un punto que minimice la suma de las distancias a una fábrica, un mercado y varios almacenes existentes en cierta ciudad. Este problema de localización, llamado de Fermat-Weber o de la p-mediana, se formula así: dados p puntos del plano $x_1, ..., x_p$, se busca un punto $x \in \mathbb{R}^2$ que sea solución óptima de

$$(FW) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^2} \quad f(x) := \sum_{i=1}^{p} \|x - x_i\|.$$

Se pide:

(a) Probar que (FW) tiene una solución óptima única.

(b) Caracterizar la optimalidad de un punto $x \notin \{x_1, ..., x_p\}$.

(c) Demostrar que, si $p = 4$ y $x_1, ..., x_4$ son los vértices de un cuadrilátero, entonces el punto de intersección de las diagonales es la solución óptima de (FW).

(d) Proponer un algoritmo iterativo, inspirado en la respuesta al apartado (b), que genere una sucesión que aproxime la solución óptima de (FW) cuando dicha sucesión es convergente. Ilustre dicho algoritmo efectuando tres iteraciones del mismo cuando los puntos dados son $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,3)$, y $(3,2)$, tomando como punto inicial el baricentro (o centro de masas) del cuadrilátero que forman.

Solución:

(a) Es fácil probar que f es coerciva, es decir, que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. Como es continua sobre el conjunto cerrado $\mathbb{R}^n$, alcanza su mínimo.

De otra forma: f tiene un mínimo global x^* sobre $\operatorname{conv}\{x_1, ..., x_p\}$ (compacto) y $f(x^*) \leq f(x)$ $\forall x \notin \operatorname{conv}\{x_1, ..., x_p\}$ (pero esto último, aunque sea intuitivo, no parece fácil de probar).

La unicidad es consecuencia de que f es estrictamente convexa, es decir, de satisfacer

$$f[(1-\lambda)x + \lambda y] < (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales $x \neq y$ y $\lambda \in]0,1[$.

(b) $\overline{x} \notin \{x_1, ..., x_p\}$ (condición que garantiza la diferenciabilidad de f en $\overline{x}$) es solución óptima de (FW) si, y sólo si, $\nabla f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\overline{x} - x_i}{\|\overline{x} - x_i\|} = 0_n$ si, y sólo si,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{\|x_i - \overline{x}\|}}{\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\|x_i - \overline{x}\|}}. \tag{1}$$

(c) Supongamos que $p = 4$. Entonces el punto x de intersección de sus dos diagonales, digamos $[x_1, x_2]$ y $[x_3, x_4]$, se puede escribir así: $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4$, con $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = 1$ y $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, ..., 4$. Es fácil comprobar que $x - x_1 = \lambda_2 (x_2 - x_1)$ por lo que $\frac{x - x_1}{\|x - x_1\|} = \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$; análogamente, $\frac{x - x_2}{\|x - x_2\|} = \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|}$, y expresiones semejantes con x_3 y x_4, de modo que

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\overline{x} - x_i}{\|\overline{x} - x_i\|} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\overline{x} - x_i}{\|\overline{x} - x_i\|} + \sum_{i=3}^{4} \frac{\overline{x} - x_i}{\|\overline{x} - x_i\|} = 0_n + 0_n = 0_n.$$

La solución óptima de (FW) es, por lo tanto, la intersección de las diagonales.

(d) Salvo en casos particulares como el contemplado en (c), hay que conformarse con aproximar un punto $\overline{x}$ satisfaciendo (1). El algoritmo de Weiszfeld (1937) construye una sucesión $\{y_r\}$ mediante la fórmula iterativa

$$y_{r+1} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{\|x_i - y_r\|}}{\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\|x_i - y_r\|}}, \ r = 1, 2, ... \tag{2}$$

Si la sucesión (2) está bien definida (es decir, $y_r \notin \{x_1, ..., x_p\}$ para todo r) y es convergente, entonces $\overline{x} := \lim_r y_r$ satisface (1), es decir, que $\overline{x}$ es solución óptima de (FW), suponiendo que $\overline{x} \notin \{x_1, ..., x_p\}$. Pero no es fácil demostrar la convergencia. De hecho, Chandrasekaran y Tamir (1989) han probado la existencia de un conjunto no numerable de puntos y_1 que, tomados como punto inicial para el algoritmo de Weiszfeld, hacen que $\{y_r\}$ no converja. Afortunadamente, dicho conjunto es de medida nula, por lo que tenemos probabilidad 1 de aproximar la solución óptima si el punto inicial lo elegimos aleatoriamente.

Se han propuesto otros muchos métodos numéricos para este problema. Uno de los últimos, debido a Nie, Parrilo y Sturmfels (2008), reformula (FW) como un problema de programación semidefinida (con restricciones que se formulan exigiendo que cierta combinación lineal de matrices simétricas es semidefinida positiva).

Tomando como punto inicial $y_0 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{2}\right)$, los dos primeros puntos generados por el algoritmo de Weiszfeld son $y_1 = (1.1366, 1.4629)$ e $y_2 = (1.0814, 1.4254)$, cuya distancia a la solución óptima $\overline{x} = \left(1, \frac{4}{3}\right)$ se ha reducido a la tercera parte de la inicial (de hecho, no es un algoritmo muy rápido),

References

[1] Chandrasekaran, R., Tamir, A.: Open questions concerning Weiszfeld's algorithm for the Fermat-Weber location problem. Math. Programming 44A (1989) 293-295.

[2] Nie, J., Parrilo, P.A., Sturmfels, B.: Semidefinite representation of the k-ellipse. Algorithms in algebraic geometry, 117-132, IMA Vol. Math. Appl., 146, Springer, New York, 2008.

[3] Weiszfeld, E.: Sur le point par lequel la somme des distances de n points donnés est minimum. Tohoku Math. J. 43 (1937) 355-386.