XIV EDICIÓN PREMIOS JORGE JUAN
ESTADÍSTICA

Supongamos $\boldsymbol{X}$ = (X_1, X_2,…, X_n) tiene una distribución conjunta dependiente de un parámetro unidimensional desconocido θ , y sea $f_\theta(\boldsymbol{x})$ su función de densidad conjunta. Consideremos una función real del parámetro θ, $g(\theta)$.

Sea $T = T(\boldsymbol{X})$ un estimador insesgado para $g(\theta)$ con $V_\theta(T) < \infty$.

(a) Sea $\boldsymbol{U} = \{U: E_\theta(U) = 0, E_\theta(U^2) < \infty\}$ el conjunto de todos los estadísticos $U = U(\boldsymbol{X})$ que son estimadores insesgados de 0 con varianza finita.

(a.1) Demostrar que cualquier estimador $S = S(\boldsymbol{X})$ insesgado para $g(\theta)$ tal que $V_\theta(S) < \infty$, puede ser expresado como $S = T + U$, para algún estadístico $U \in \boldsymbol{U}$.

(a.2) Demostrar que $Cov_\theta(T, U) = 0$, para todo $U \in \boldsymbol{U}$, si y sólo si, T es el estimador insesgado de mínima varianza para $g(\theta)$.

(Ayuda: para la parte "⟵", considerar la familia de estimadores $\{S_\alpha = T + \alpha U, \alpha \in R\}$, y comparar su varianza con la de T).

(b) Demostrar que

$$V_\theta(T) \geq \frac{[g(\theta + h) - g(\theta)]^2}{V_\theta\big(\varphi(\boldsymbol{X}, \theta)\big)},$$

donde $\varphi(\boldsymbol{x}, \theta) = \frac{f_{\theta+h}(\boldsymbol{x}) - f_\theta(\boldsymbol{x})}{f_\theta(\boldsymbol{x})}$, siempre que $\theta + h$ esté dentro del espacio paramétrico y $f_\theta(\boldsymbol{x}) > 0$.

NOTA:

Os puede resultar de utilidad en algún momento *la desigualdad de Cauchy-Schwarz*: Si X e Y son dos variables aleatorias con varianza finita, entonces $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$.

SOLUCION:

(a.1) Sea $S = S(\boldsymbol{X})$, tal que $E_\theta(S) = g(\theta)$, $V_\theta(S) < \infty$.

Llamemos $U \coloneqq S - T$.

Entonces $E_\theta(U) = E_\theta(S - T) = 0$.

Además, $E_\theta(U^2) = E_\theta(S - T)^2 = E_\theta(S^2) + E_\theta(T^2) - 2E_\theta(ST)$.

Ahora, $E_\theta(S^2) < \infty$, $E_\theta(T^2) < \infty$, y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $E_\theta(ST) < \infty$, por lo tanto $E_\theta(U^2) < \infty$, y $U \in \boldsymbol{U}$.

(a.2) "→" Veamos que para todo estimador S tal que $E_\theta(S) = g(\theta)$, se verifica que $V_\theta(T) \leq V_\theta(S)$, para todo θ.

Si la varianza de S no es finita, no hay nada que demostrar.

Si $V_\theta(S) < \infty$, por el apartado (a.1), existe $U \in \boldsymbol{U}$ tal que $S = T + U$, entonces

$$V_\theta(S) = V_\theta(T) + V_\theta(U) + 2Cov_\theta(T, U) \geq V_\theta(T),$$

pues, por hipótesis, $Cov_\theta(T, U) = 0$, y obviamente $V_\theta(U) \geq 0$.

"←" Sea $U \in \boldsymbol{U}$. Consideremos la familia de estimadores $S_\alpha = T + \alpha U, \alpha \in R$. Entonces

$$E_\theta(S_\alpha) = E_\theta(T) + \alpha E_\theta(U) = g(\theta), \alpha \in R,$$

de manera que $S_\propto$ es insesgado para $g(\theta)$, para todo $\alpha \in R$, y al ser, por hipótesis, T el estimador insesgado de mínima varianza para $g(\theta)$, se cumplirá $V_\theta(T) \leq V_\theta(S_\propto)$, para todo $\alpha \in R$. Desarrollando, obtenemos

$$V_\theta(T) \leq V_\theta(T) + \propto^2 V_\theta(U) + 2 \propto Cov_\theta(T, U), \text{ para todo } \alpha \in R.$$

Así, $\propto^2 V_\theta(U) + 2 \propto Cov_\theta(T, U) \geq 0$, para todo $\alpha \in R$.

Como U no puede ser un estimador constante, necesariamente $V_\theta(U) > 0$, de manera que la función

$$h(\propto) \coloneqq \propto^2 V_\theta(U) + 2 \propto Cov_\theta(T, U), \propto \in R$$

es una parábola convexa que pasa por el origen, con $h(\propto) \geq 0$, para todo $\alpha \in R$. Así $Cov_\theta(T, U) = 0$.

(b) Veamos que $[g(\theta+h)-g(\theta)]^2 \leq V_\theta\big(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)\big)V_\theta(T)$.

Si $V_\theta\big(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)\big)=\infty$, no hay nada que demostrar.

En otro caso, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a las variables aleatorias $\varphi(\boldsymbol{X},\theta)$ y $T-g(\theta)$, obtenemos

$$E_\theta\left(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)\big(T-g(\theta)\big)\right)^2 \leq E_\theta(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)^2)E_\theta\left(\big(T-g(\theta)\big)^2\right).$$

Ahora, $E_\theta\left(\big(T-g(\theta)\big)^2\right)=V_\theta(T)$. Además

$$E_\theta\big(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)\big)=\int\dots\int_{R^n}\varphi(x_1,\dots,x_n,\theta)\,f_\theta(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$$

$$=\int\dots\int_{R^n}\frac{f_{\theta+h}(x_1,\dots,x_n)-f_\theta(x_1,\dots,x_n)}{f_\theta(x_1,\dots,x_n)}\,f_\theta(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$$

$$=\int\dots\int_{R^n}f_{\theta+h}(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n-\int\dots\int_{R^n}f_\theta(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n=0.$$

Por lo tanto, $E_\theta(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)^2)=V_\theta\big(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)\big)$.

Por otro lado,

$$E_\theta\left(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)\big(T-g(\theta)\big)\right)=\int\dots\int_{R^n}\varphi(x_1,\dots,x_n,\theta)\big(T(x_1,\dots,x_n)-g(\theta)\big)\,f_\theta(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$$

$$=\int\dots\int_{R^n}f_{\theta+h}(x_1,\dots,x_n)T(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n-g(\theta)\int\dots\int_{R^n}f_{\theta+h}(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$$

$$-\int\dots\int_{R^n}f_\theta(x_1,\dots,x_n)T(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n+g(\theta)\int\dots\int_{R^n}f_\theta(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$$

$$=g(\theta+h)-g(\theta)-g(\theta)+g(\theta)=g(\theta+h)-g(\theta).$$

Así, $E_\theta\left(\varphi(\boldsymbol{X},\theta)\big(T-g(\theta)\big)\right)^2=[g(\theta+h)-g(\theta)]^2$.